

Holografie

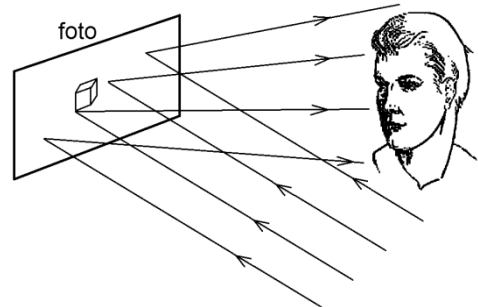
- § 1 Wat is een hologram?
- § 2 Reflectie- en transmissiehologrammen
- § 3 Interferentie bij het maken van hologrammen
- § 4 Het geometrische model bij het uitlezen van hologrammen
- § 5 Bragg-reflectie bij het uitlezen van reflectiehologrammen
- § 6 Diffractie bij een binair tralie (vooruitlopend op § 8)
- § 7 Diffractie bij een cosinustralie (vooruitlopend op § 8)
- § 8 Diffractie bij het uitlezen van transmissiehologrammen
- § 9 Reëel beeld; orthoscopisch en pseudoscopisch beeld
- § 10 Kopiëren van hologrammen

Bijlagen

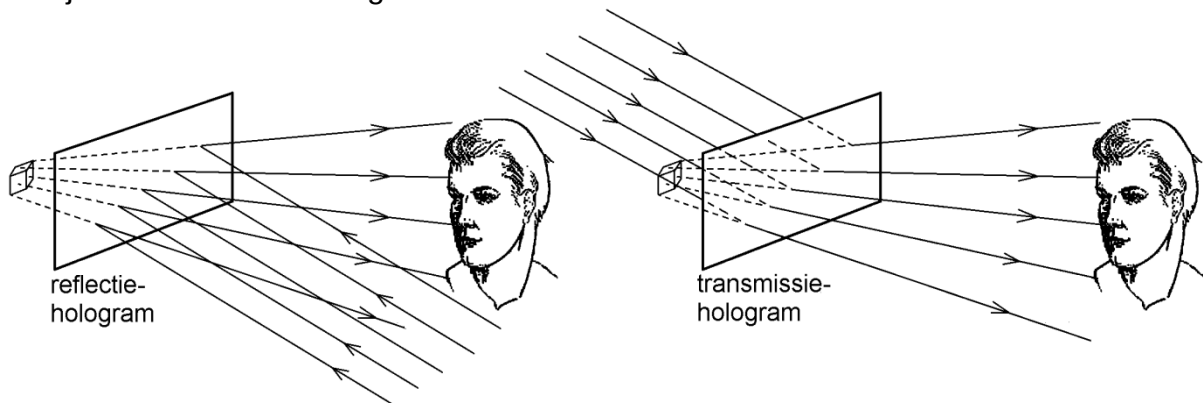
§ 1 Wat is een hologram?

Reflectie- en transmissiehologram

In de figuur hiernaast is een foto van een blokje getekend. Het op de foto vallende licht wordt weerkaatst. Als je naar de foto kijkt, verandert het perspectief (= gezichtspunt) van het blokje niet als je je hoofd verplaatst. Je zal, als je je hoofd bijvoorbeeld naar rechts beweegt, niet opeens het rechter zijvlak van het blokje kunnen zien als dat eerder ook niet zichtbaar was. De foto geeft een tweedimensionale weergave van een driedimensionaal voorwerp.



In de onderstaande figuren zijn hologrammen van het blokje getekend. Je ziet het blokje als het ware achter het hologram en in drie dimensies. Als je je hoofd naar links of naar rechts beweegt, zie je het blokje vanuit een ander gezichtspunt. Een hologram is dus een driedimensionale weergave in een tweedimensionaal vlak. In de linker figuur is een reflectiehologram getekend en in de rechter figuur een transmissiehologram. Bij een reflectiehologram komt het opvallende licht van voren en bij een transmissiehologram van achteren.

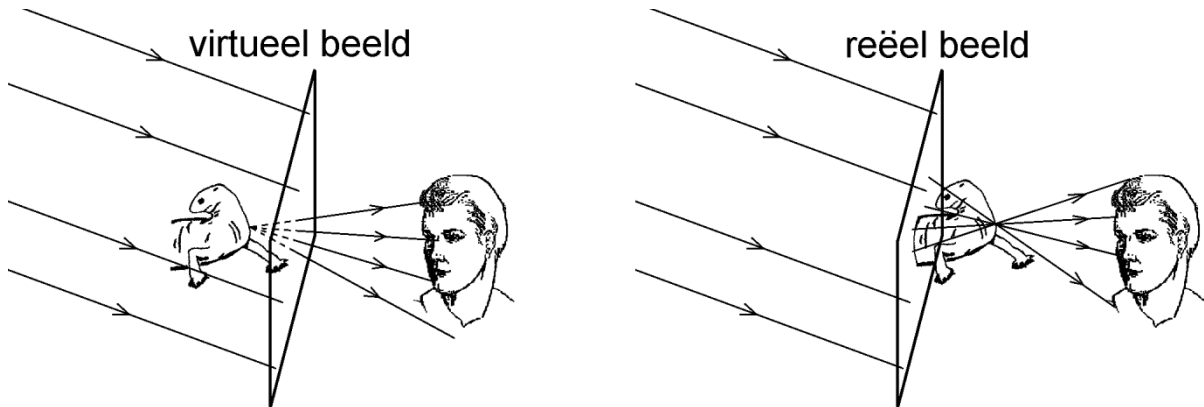


Stel dat je met een ondoorzichtig stuk papier de helft van de foto en het blokje afdekt. Je kunt dan alleen nog maar het onafgedekte deel van het blokje zien. Bij een hologram werkt dat anders. Elk stukje van het hologram bevat informatie over het hele blokje. Als je het hologram voor een deel afdekt, kun je in het overige deel nog steeds het hele blokje zien.

Het woord holografie is afgeleid van het Griekse 'holos' dat geheel en 'grafein' dat schrijven betekent. Bij een holografische opname van een voorwerp (object) wordt gebruik gemaakt van een zogenoemde holografische film of plaat (te vergelijken met een fotografische film) die op een bijzondere manier wordt belicht. Bij het ontwikkelen ervan wordt het lichtpatroon (interferentiepatroon) vastgelegd voor later gebruik. Je krijgt dan een hologram.

Virtueel beeld en reëel beeld

Het door een hologram weergegeven beeld kan zowel virtueel als reëel zijn. In de onderstaande linker figuur is het beeld, een dinosaurus, virtueel en in de rechter figuur is het beeld reëel. Vanuit de waarnemer gezien bevindt een virtueel beeld zich achter het hologram en een reëel beeld zich voor het hologram. Dit geldt zowel bij reflectiehologrammen als bij transmissiehologrammen. Tussenvormen, waarin het beeld deels reëel en deels virtueel is, zijn ook mogelijk.



Een virtueel beeld bestaat uit virtuele beeldpunten en een reëel beeld uit reële beeldpunten. Bij een virtueel beeldpunt snijden de lichtstralen elkaar niet echt; bij een reëel beeldpunt wel. Zie de uit het hologram komende lichtstralen in de figuur.

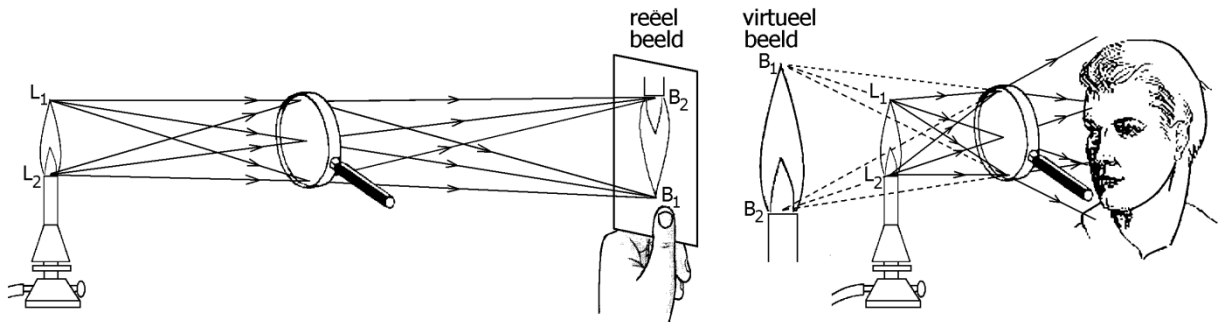
Opgaven bij § 1

Opgave 1

Iemand wil zijn huis inrichten en besluit een hologram ter decoratie op te hangen. Leg uit waarom er waarschijnlijk een reflectiehologram gaat komen.

Opgave 2

De onderstaande figuren laten het verschil zien tussen een reëel en een virtueel beeld van een gasvlam. Bij een reëel beeld snijden de lichtstralen elkaar bij de beeldpunten echt, eventueel na voorwaartse verlenging. Bij een virtueel beeld snijden de lichtstralen elkaar bij de beeldpunten alleen na achterwaartse verlenging. Het reële beeld kan worden afgebeeld op een scherm.



Leg uit waarom een reëel beeld bij een hologram vaak minder duidelijk op een scherm afgebeeld kan worden dan het reële beeld van een gasvlam?

Opgave 3

Je wilt een hologram van zeer dichtbij bekijken.

a.

Bij welk soort beeld, een virtueel beeld of een reëel beeld, levert dit problemen op? Welk probleem?

b.

Bij welk type hologram, een reflectiehologram of een transmissiehologram, kan dit problemen opleveren? Welk probleem?

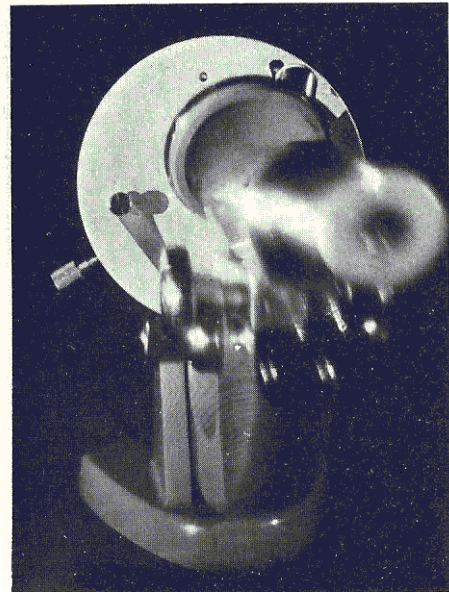
Opgave 4

Je staat buiten en kijkt door een raam naar de woonkamer van een huis. Geef twee in de leestekst genoemde kenmerken van hologrammen die ook in deze situatie gelden.

Opgave 5

De foto hiernaast is genomen van een bekend reflectiehologram, namelijk de 'Microscoop' van Walter Spierings. De tubus van de microscoop steekt ongeveer 20 cm vóór het hologram de kamer in.

Wat kun je nu zeggen over het reëel of virtueel zijn van het beeld?

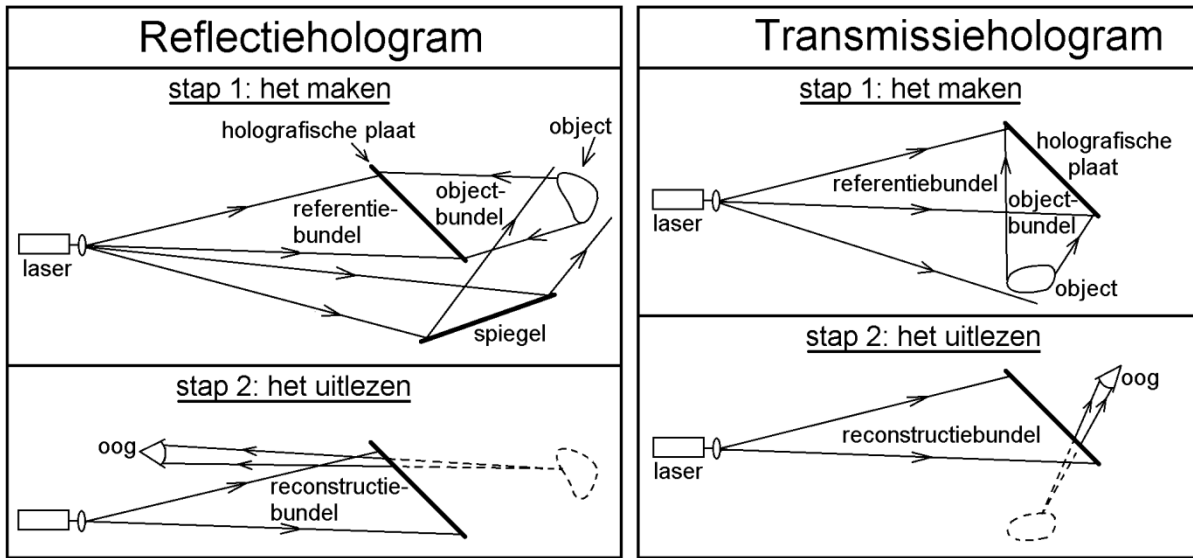


'Microscoop', Walter Spierings.

§ 2 Reflectie- en transmissiehologrammen

Holografie met één laserstraal ('single-beam holography')

Hologrammen kunnen worden onderscheiden in transmissie- en reflectiehologrammen. Het onderstaande overzicht geeft schematisch weer hoe ze worden gemaakt (stap 1) en hoe ze worden uitgelezen (stap 2).

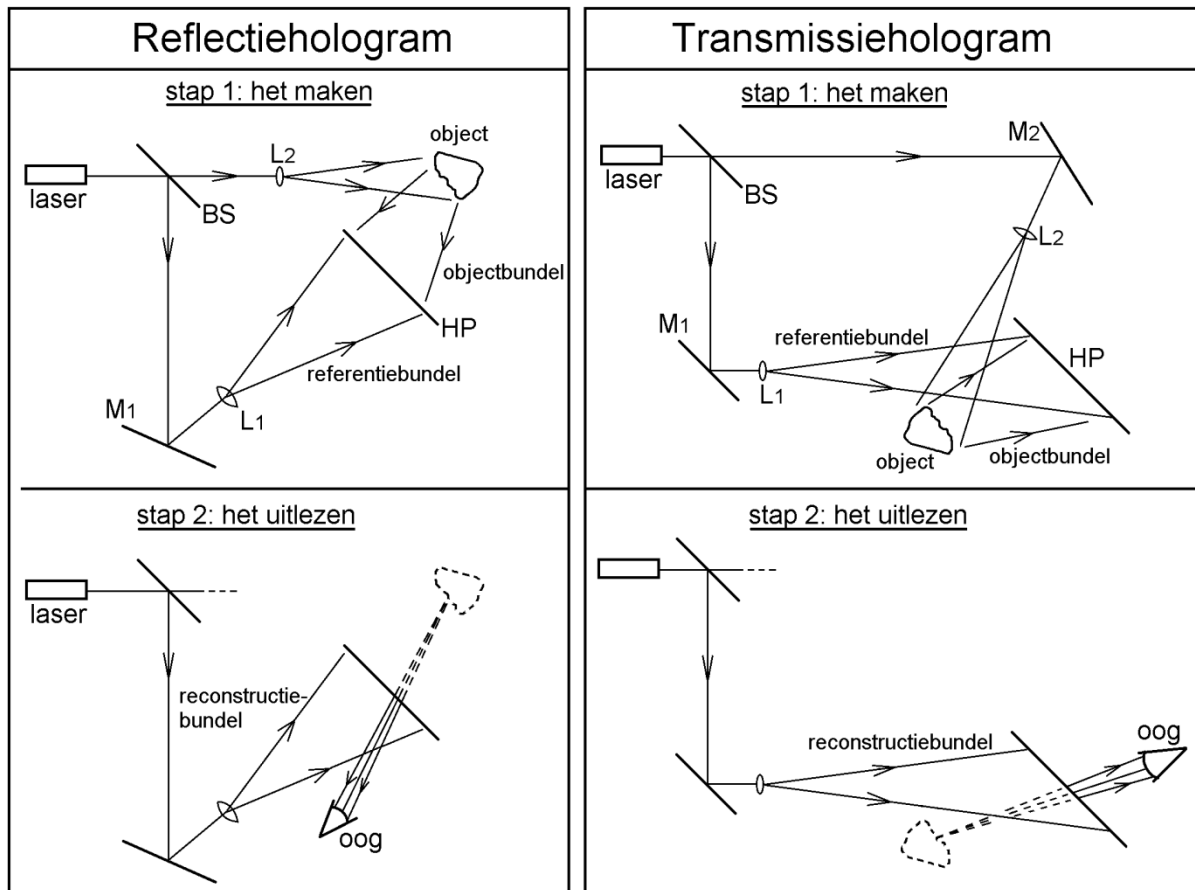


Het maken van een hologram (stap 1) vindt plaats in een donkere ruimte. Er vallen twee lichtbundels op de holografische plaat, namelijk de referentiebundel en de objectbundel. Beide lichtbundels zijn afkomstig van dezelfde laser. De referentiebundel is een divergerende of een evenwijdige lichtbundel zonder informatie van het voorwerp. De objectbundel wordt verkregen door het voorwerp met het laserlicht te beschijnen en het weerkaatste licht op de holografische plaat te laten vallen. De holografische plaat legt het interferentiepatroon van beide bundels vast. In dat interferentiepatroon is de 3D-vorm van het voorwerp vastgelegd. Zoals uit de figuren blijkt, vallen de referentiebundel en de objectbundel bij een reflectiehologram van tegengestelde kanten op de holografische plaat en bij een transmissiehologram van dezelfde kant op de holografische plaat.

Nadat de holografische plaat ontwikkeld is, is het hologram klaar en kan het worden uitgelezen (stap 2). Hierbij is het voorwerp weggehaald en wordt het hologram met slechts één lichtbundel beschienen: de zogenoemde reconstructiebundel. In het ideale geval is de reconstructiebundel gelijk aan de referentiebundel. Bij een reflectiehologram kijk je naar het gereflecteerde licht en bij een transmissiehologram naar het doorgelaten licht. In beide gevallen zie je het voorwerp op de plaats waar het zich tijdens de opname (in stap 1) bevond. Alle 3D-eigenschappen van het voorwerp zijn daarbij behouden gebleven.

Holografie met een gesplitste laserstraal ('split-beam holography')

In veel gevallen wordt ervoor gekozen om de oorspronkelijke laserstraal met een half doorlaatbare spiegel (beam splitter BS) op te splitsen in twee lichtbundels. Zie de onderstaande figuren. Hierin is de holografische plaat met HP aangeduid. De spiegels M_1 en M_2 en de lensjes L_1 en L_2 geven de bundels de juiste richting en maken ze divergerend. Het voordeel van deze opstelling is dat je meer invloed hebt op het holografische proces zoals de invalshoeken van het licht en de verhouding van de lichtsterkte tussen de referentiebundel en objectbundel.



De belichting tijdens het maken en het uitlezen van een hologram

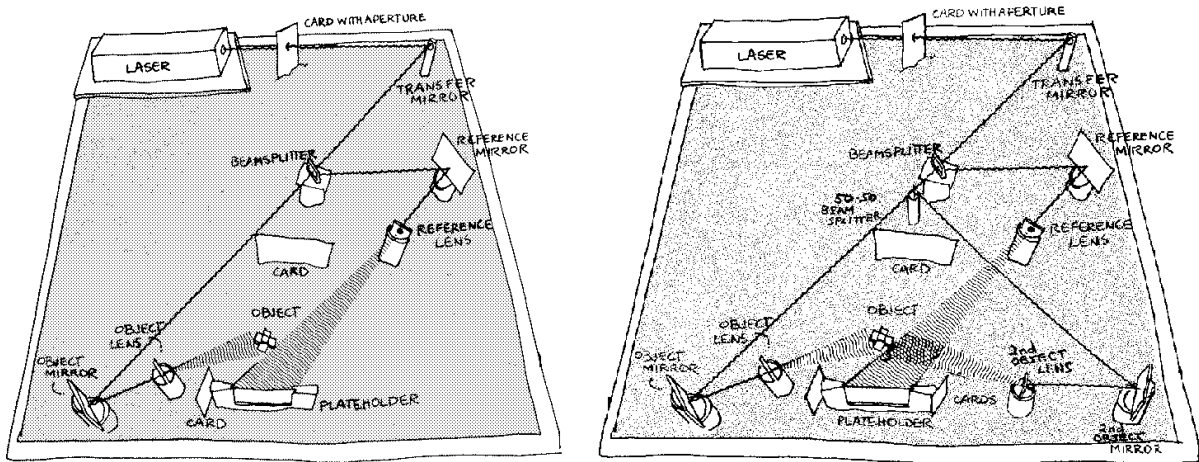
Het maken van hologrammen moet met laserlicht gebeuren. De bron van laserlicht kunnen we opvatten als een monochromatische puntbron; bedenk daarbij dat laserlicht zowel temporeel als spatieel coherent is. De temporele coherentielengte bepaalt het maximum toelaatbare weglengteverschil tussen de referentiebundel en de objectbundel. De spatiële coherentiebreedte bepaalt de maximum toelaatbare breedte van het object en de holografische plaat.

Bij het uitlezen van hologrammen zijn de eisen van de belichting minder streng. De lichtbron moet bij benadering een puntbron zijn. Bij een reflectiehologram zijn de zon en een halogeenlamp geschikt. Het feit dat deze bronnen wit licht uitstralen, is geen belemmering. Bij het uitlezen van transmissiehologrammen moet de lichtbron min of meer dezelfde kleur hebben als het gebruikte laserlicht tijdens het maken van het hologram.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

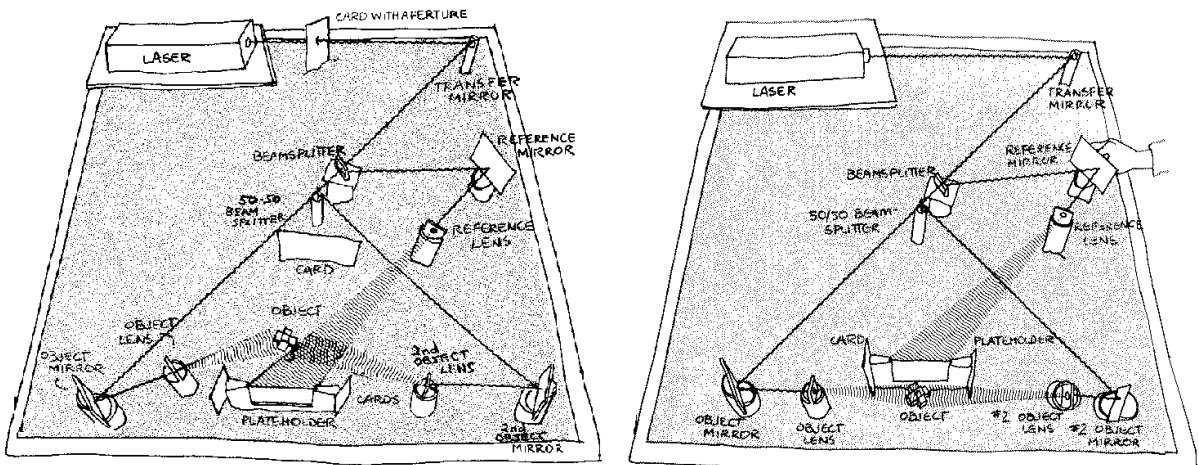
De onderstaande figuren tonen ieder een holografische opname.



Leg uit wat het verschil is tussen de linker en de rechter figuur. Wat zou het nut van de toevoeging in de rechter figuur zijn?

Opgave 2

De onderstaande figuren tonen ieder een holografische opname.



Wordt in de linker figuur een reflectie- of een transmissiehologram gemaakt?

Wordt in de rechter figuur een reflectie- of een transmissiehologram gemaakt?

Opgave 3

In de tekening hiernaast bouwen twee mannen een opstelling waarmee een hologram opgenomen gaat worden. De beam splitter BS splitst de laserstraal op in twee aparte lichtbundels. De ene lichtbundel gaat via spiegel M1 naar de holografische plaat H. De andere lichtbundel gaat via spiegel M2 en het object O naar de holografische plaat.

a.

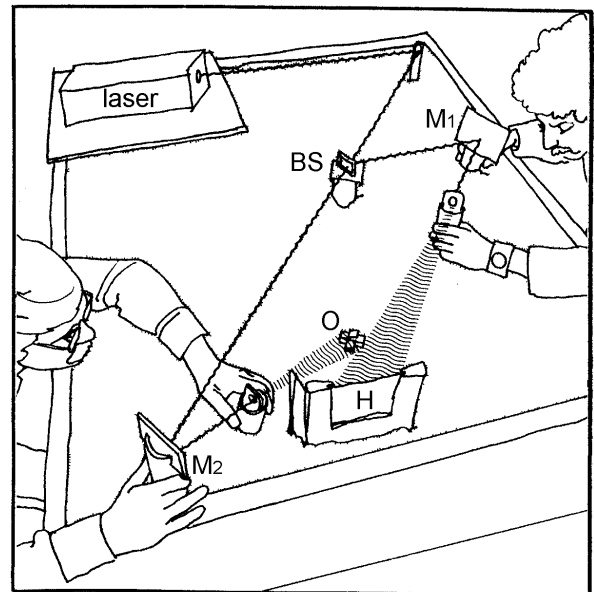
Ontstaat er een transmissie- of een reflectiehologram?

De beide heren maken beide lichtwegen voorbij de beam splitter ongeveer even lang, bijvoorbeeld allebei ongeveer 50 cm.

b.

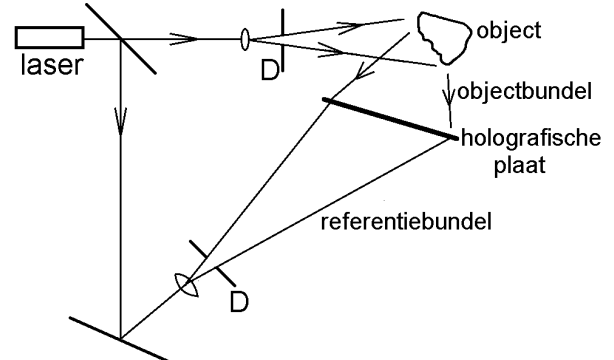
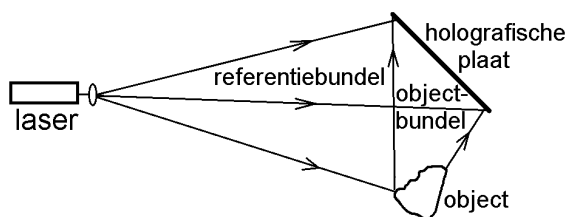
Waarom doen zij dat?

- 1) Om de intensiteit van de referentie- en van de objectbundel gelijk te maken.
- 2) Om problemen te voorkomen in verband met de spatiële coherentie.
- 3) Om problemen te voorkomen in verband met de temporele coherentie.
- 4) Om de absorptie van het laserlicht in beide lichtwegen gelijk te houden.



Opgave 4

In de onderstaande figuren wordt een hologram opgenomen. De gebruikte laser is in beide figuren gelijk. In de linker figuur is er sprake van 'single beam holografie' en in de rechter figuur van 'split-beam holografie'. De rechter opstelling is voorzien van twee diafragma's D die de buitenste randen van de lichtbundels tegenhouden.



a.

Ontstaat er een transmissiehologram (TH) of een reflectiehologram (RH)?

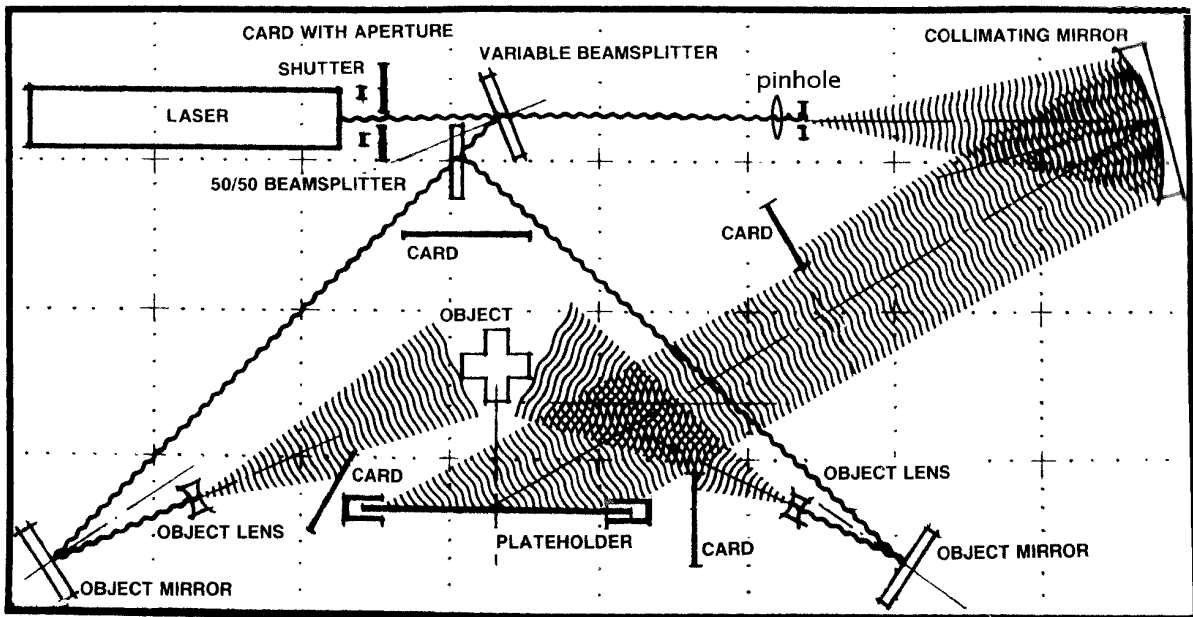
In de linker figuur: _____. In de rechter figuur: _____.

b.

In welke opstelling, de linker of de rechter, zal de spatiële resolutie eerder een beperkende factor voor de kwaliteit van het uiteindelijke hologram zijn? Leg je antwoord uit.

Opgave 5

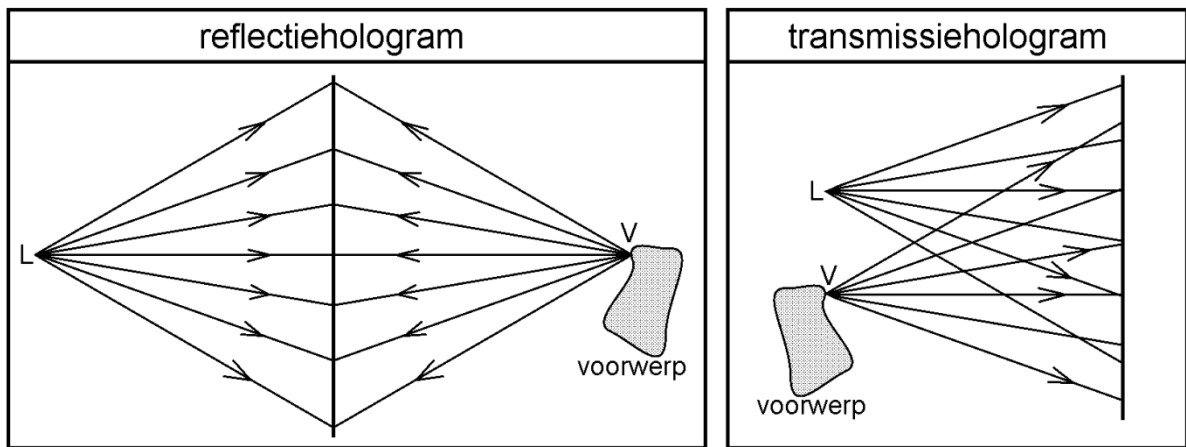
De onderstaande figuur toont een geavanceerde opstelling van het maken van een transmissiehologram. Leg uit wat de functie van de pinhole is.



§ 3 Interferentie bij het maken van hologrammen

Interferentie tussen referentiebundel en objectbundel

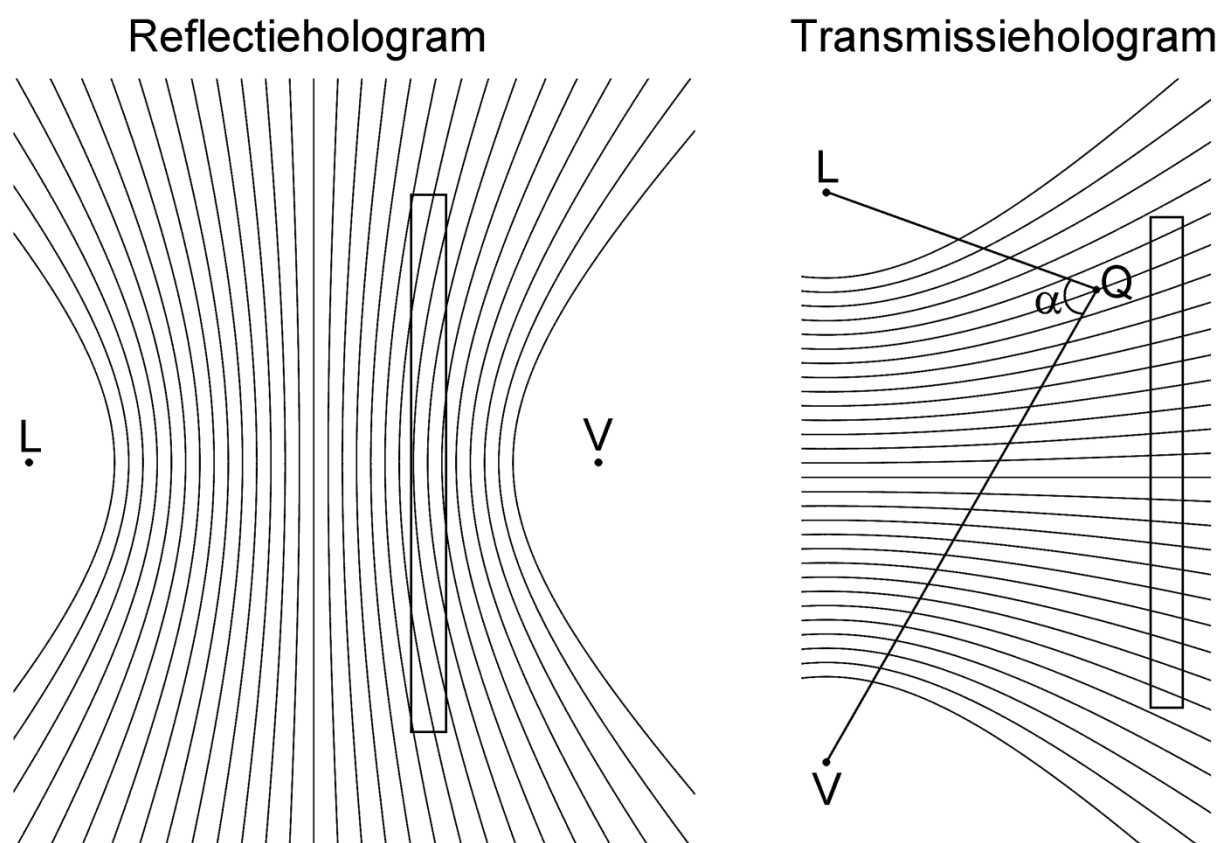
Bij het maken van een reflectiehologram vallen de referentiebundel en de objectbundel van weerskanten op de holografische plaat. Bij het maken van een transmissiehologram vallen deze bundels vanaf dezelfde kant op de holografische plaat. In de onderstaande figuren is dit schematisch weergegeven. Daarbij is de puntbron van de referentiebundel met L aangegeven. Van de objectbundel zijn alleen de lichtstralen getekend die van één willekeurig voorwerpspunt V vertrekken.



Het voorwerp bestaat uit zeer veel punten en van ieder punt vertrekken in principe lichtstralen ten gevolge van reflectie. Lichtstralen van de 'achterkant' van het voorwerp kunnen de holografische plaat niet bereiken; we kunnen in het hologram dus alleen de 'voorkant' van het voorwerp vastleggen. In de volgende beschouwing beperken we ons eerst tot slechts één willekeurig voorwerpspunt V aan de voorkant van het voorwerp.

De lichtbundels die van de punten L en V vertrekken, vertonen interferentie. In sommige punten in de ruimte treedt versterking van het licht op (constructieve interferentie) en in sommige punten verzwakking (destructieve interferentie). In de onderstaande figuren zijn de buikvlakken (te vergelijken met buiklijnen maar dan driedimensionaal) getekend bij een reflectiehologram (links) en bij een transmissiehologram (rechts). Deze buikvlakken worden in de wiskunde hyperboloïden genoemd. In de figuren zijn ook de holografische platen als (overdreven) dikke platen getekend. Ten behoeve van de eenvoud nemen we aan dat de getekende plaat geheel uit de lichtgevoelige emulsie bestaat.

In de lichtgevoelige emulsie van de holografische plaat bevinden zich stoffen die een chemische reactie ondergaan onder invloed van licht. Bij de buikvlakken vinden deze reacties dus het sterkst plaats. Hierdoor vormen zich bij het ontwikkelen van de emulsie vlakken die gedeeltelijk reflecterend zijn. Uit de linker figuur blijkt duidelijk dat de buikvlakken in een reflectiehologram voornamelijk evenwijdig aan de holografische plaat lopen. Uit de rechter figuur blijkt dat de buikvlakken in een transmissiehologram min of meer loodrecht op de plaat staan.



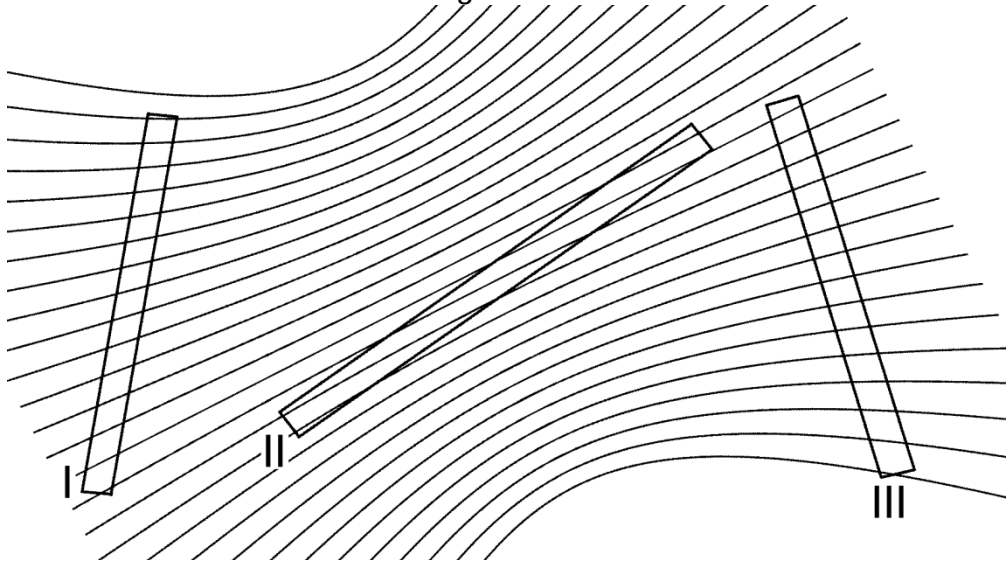
In de rechter figuur is een belangrijke eigenschap van buikvlakken weergegeven. Neem een willekeurig punt Q op een buikvlak in gedachten. De verbindingslijnen van L naar Q en van V naar Q spannen een vlak op. Binnen dat vlak wordt de hoek α tussen beide verbindingslijnen precies door midden gedeeld door (de raaklijn van) het buikvlak. Deze eigenschap van buikvlakken vormt de basis van het hierna te bespreken geometrische model. Daarbij worden de lichtstralen die vanuit L vertrekken, zodanig weerkaatst, dat ze uit V lijken te komen.

Zoals eerder is aangegeven, bestaat het voorwerp uit vele voorwerpspunten zoals V. Elk punt zorgt voor een serie buikvlakken in het hologram. De buikvlakken van de verschillende punten van het voorwerp lopen in de emulsie dwars door elkaar heen.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

In de onderstaande figuur zijn de buikvlakken getekend van twee coherente puntbronnen bij een holografische opname. Vanuit de ene puntbron vertrekt de referentiebundel. De andere puntbron is een punt van het voorwerp dat holografisch vastgelegd wordt. Geef van de drie holografische platen I, II en III aan of ze een reflectie- of een transmissiehologram worden.



Opgave 2

a.

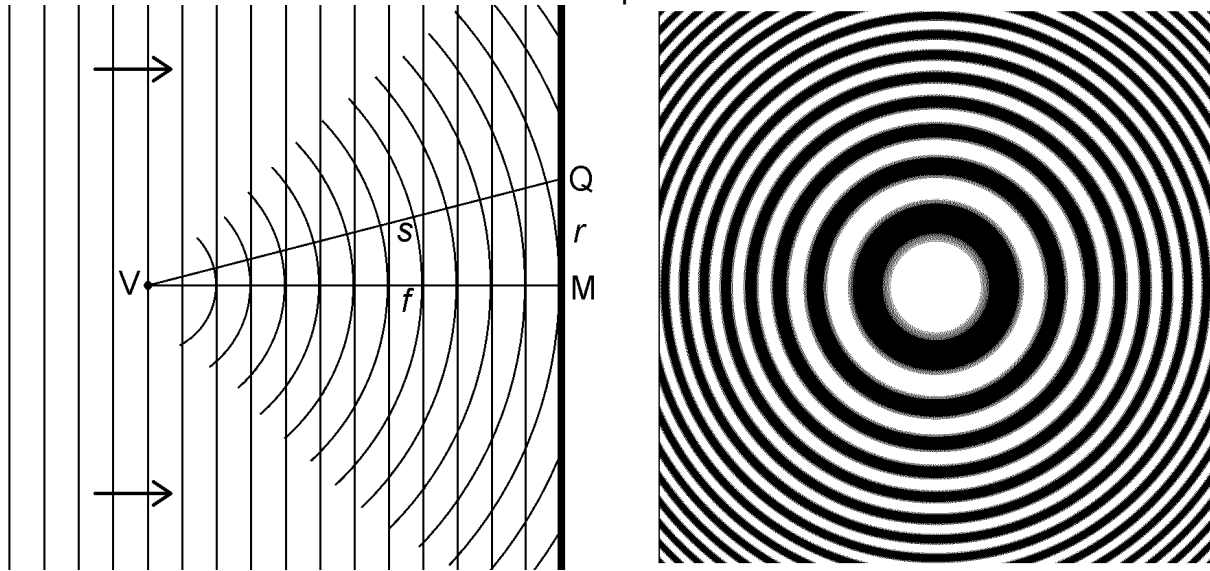
In welke hologrammen liggen de buikvlakken in het algemeen dicht bij elkaar: in reflectie- of transmissiehologrammen?

b.

Tijdens het maken van hologrammen moet de opstelling zoveel mogelijk trillingsvrij zijn. Bij welke hologrammen is dat belangrijker: bij reflectie- of transmissiehologrammen? Leg je antwoord uit.

Opgave 3

In de onderstaande linker figuur wordt een holografische plaat belicht door een evenwijdige, loodrecht invallende referentiebundel en door een bolvormige objectbundel die vanuit één punt V afkomstig is. In deze figuur zijn de golfbergen van beide lichtbundels op één tijdstip weergegeven. Van alle punten van de plaat heeft M de kleinste afstand tot V. Beide lichtbundels komen in fase bij M aan met dezelfde amplitude. Het interferentiepatroon op de holografische plaat is rotatiesymmetrisch rond M en is in de rechter figuur afgebeeld. Het op deze manier gemaakte hologram heet een 'Gabor lens' of een 'continue zoneplaat'.



In de leestekst van deze paragraaf is L steeds de puntbron van de referentiebundel.

a.

Wat kun je zeggen over de plaats van L in de bovenstaande linker figuur?

b.

Teken in de linker figuur vijf buiklijnen.

c.

Wordt de holografische plaat een reflectiehologram of een transmissiehologram?

Punt Q is een willekeurig punt op de plaat.
 De afstand tussen V en M is aangegeven met f .
 De afstand tussen V en Q is aangegeven met s .
 De afstand tussen M en Q is aangegeven met r .
 d.

Toon aan dat geldt:

$$s = f \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{f}\right)^2}.$$

In het volgende beperken we ons tot gevallen waarbij r veel kleiner is dan f . In dat geval geldt bij benadering:

$$s = f + \frac{r^2}{2 \cdot f}.$$

e.

Toon aan dat voor de straal r van het eerste orde maximum geldt: $r = \sqrt{2 \cdot f \cdot \lambda}$

f.

Toon aan dat voor het n -de orde maximum geldt: $r = \sqrt{2n \cdot f \cdot \lambda}$.

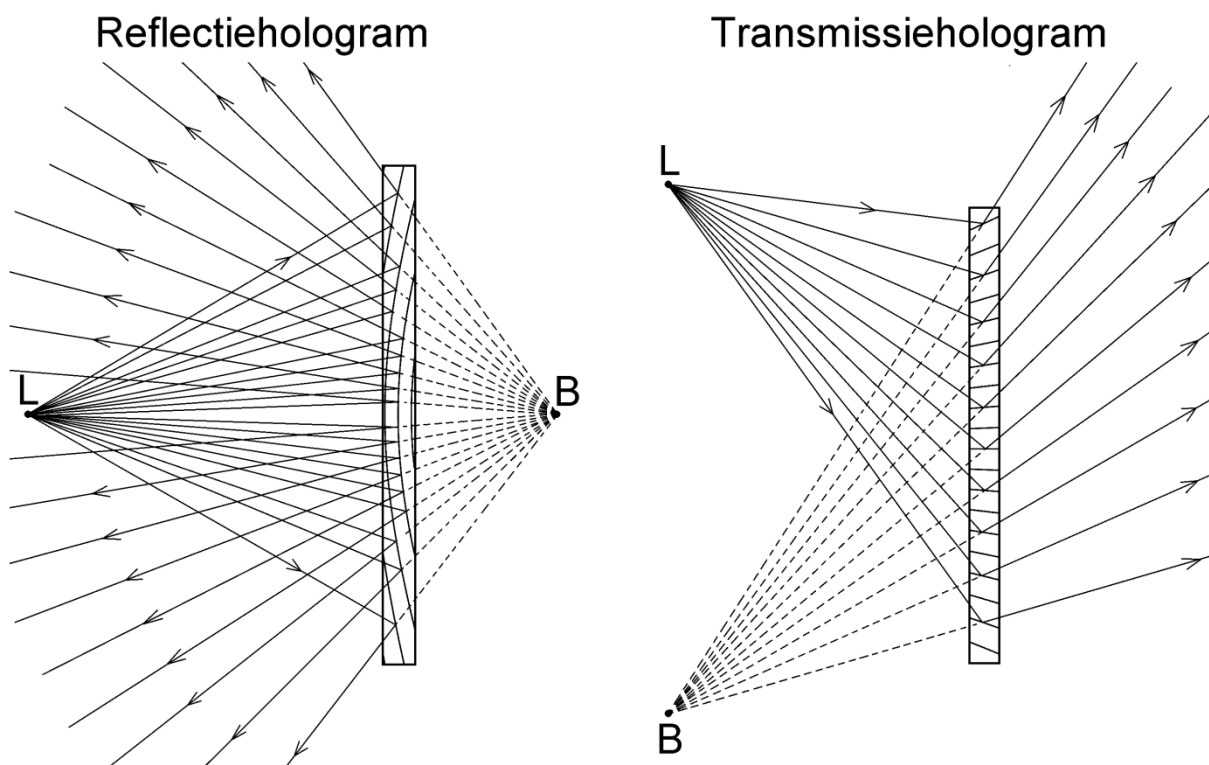
g.

Leg met het laatste resultaat uit dat de afstand tussen de interferentieringen op de holografische plaat steeds kleiner wordt bij toenemende afstand tot het midden M.

§ 4 Het geometrische model bij het uitlezen van hologrammen

Het geometrische model bij het uitlezen van hologrammen

In het geometrische model beschrijven we het uitlezen van een hologram met behulp van lichtstralen. Daarbij wordt het golfkarakter van het licht buiten beschouwing gelaten. In de onderstaande figuren wordt weergegeven hoe de invallende lichtstralen van de reconstructiebundel door de reflecterende vlakken (buikvlakken) in een hologram worden weerkaatst. De puntbron van de reconstructiebundel is met L aangegeven. In een reflectiehologram worden de invallende lichtstralen zodanig weerkaatst, dat ze er aan dezelfde kant weer uitkomen en dat ze uit beeldpunt B lijken te komen. In een transmissiehologram worden de invallende lichtstralen zodanig door de reflecterende vlakken weerkaatst, dat ze er aan de andere kant uitkomen en dat ze uit beeldpunt B lijken te komen. Als de puntbron van de reconstructiebundel op dezelfde plaats staat als de puntbron van de referentiebundel tijdens de opnamefase, heeft beeldpunt B dezelfde plaats als het bijbehorende voorwerpspunt V.



Uiteraard bestaat een voorwerp uit vele voorwerpspunten. Bij elk punt hoort een serie buikvlakken in het hologram. De buikvlakken van de verschillende punten van het voorwerp lopen in de emulsie dwars door elkaar heen. Alle buikvlakken samen zorgen ervoor dat er ook veel beeldpunten B zijn en dat het hele voorwerp wordt afgebeeld. Zie bijvoorbeeld de volgende figuren behorend bij een transmissiehologram.

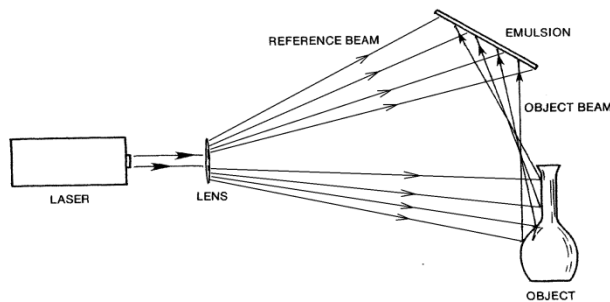


Figure 4.8. Making a transmission hologram of an extended object.

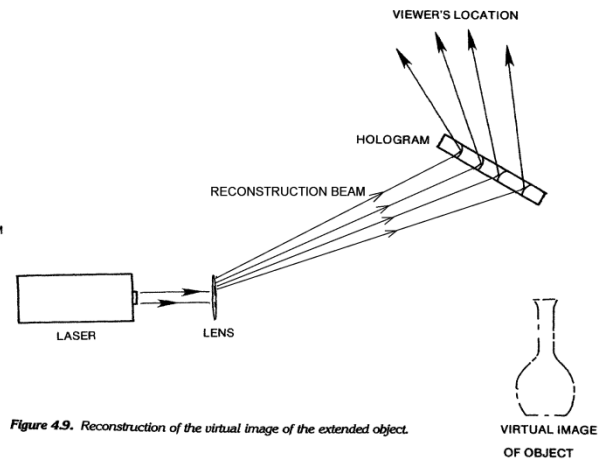


Figure 4.9. Reconstruction of the virtual image of the extended object.

Tot nu toe werd de letter L gebruikt om de puntbron van zowel de referentiebundel als van de reconstructiebundel mee aan te duiden. We gingen er vanuit dat beide punten dezelfde positie ten opzichte van het hologram hadden. Dat hoeft echter niet het geval te zijn. Als de ene puntbron verschoven is ten opzichte van de andere puntbron, zijn alle beeldpunten B ook verschoven ten opzichte van de bijbehorende voorwerpspunten V. Zolang beide bronnen PUNTBRONNEN zijn, is het beeld nog wel bij benadering scherp. Overigens kunnen we de lichtbron van een evenwijdige bundel als een puntbron in het oneindige opvatten.

Als de bron van de reconstructiebundel niet puntvormig is, zal het beeld van het voorwerp niet scherp zijn. De zon is weliswaar geen puntbron maar hij staat zo ver weg dat we hem toch als zodanig kunnen opvatten. De zon is daarom ook geschikt voor het uitlezen van een reflectiehologram.

Beperkingen van het geometrische model

Het geometrische model heeft als grote beperking dat golfeigenschappen van licht buiten beschouwing blijven. In de paragrafen die hierna komen zal het golfkarakter dan ook centraal staan en daarmee kunnen we de volgende eigenschappen van hologrammen verklaren.

1)

Je kunt reflectiehologrammen uitlezen door ze met wit licht te beschijnen. Het beeld zie je dan toch in één kleur, namelijk de kleur waarmee het hologram gemaakt is.

2)

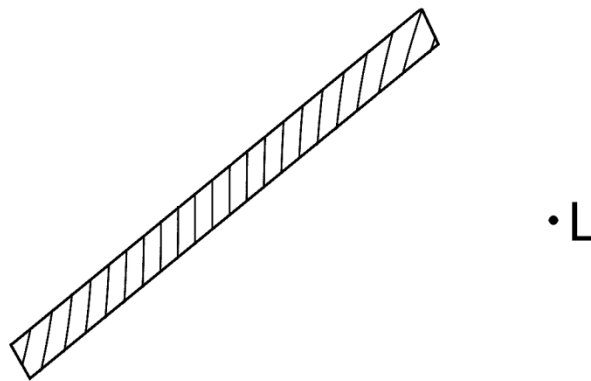
Je kunt transmissiehologrammen alleen uitlezen door ze met monochromatisch licht te beschijnen. Dit licht moet bij voorkeur dezelfde golflengte hebben als die van de referentiebundel tijdens de opnamefase. Bij een andere golflengte wordt het beeld in meer of mindere mate vervormd.

Opgaven bij § 4

Opgave 1

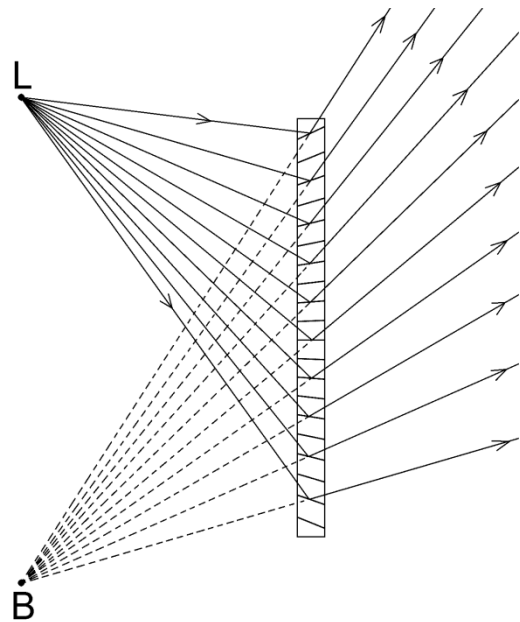
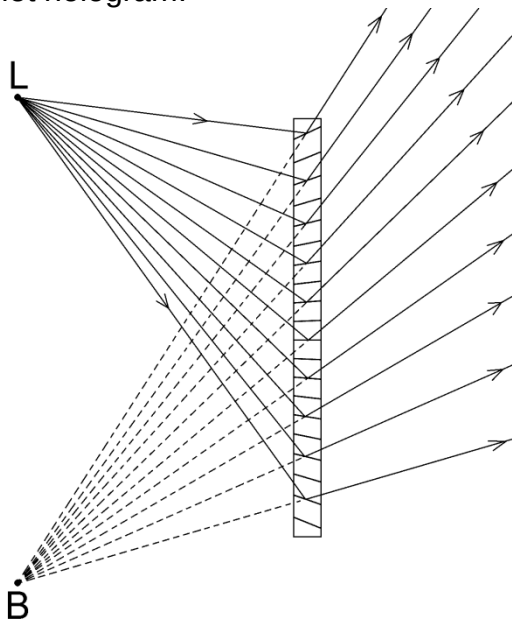
In de onderstaande figuur wordt een reflectiehologram belicht vanuit lichtpunt L. De streepjes in het hologram stellen spiegelende oppervlakjes voor.

Teken tenminste drie lichtstralen vanuit L die op het hologram vallen. Teken de weerkaatste lichtstralen. Verleng eventueel eerst de streepjes in het hologram. Ga na waar het beeldpunt zich bevindt.



Opgave 2

In de onderstaande twee figuren is weergegeven hoe de lichtbundel vanuit lichtpunt L door een transmissiehologram wordt afgebogen ten gevolge van reflecties binnen het hologram.

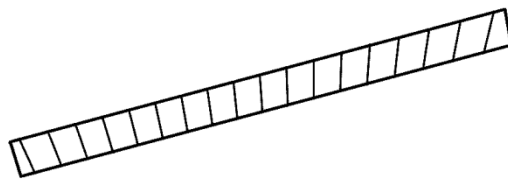


Teken in de linker figuur hoe de lichtbundel vanuit punt B zou worden afgebogen.
Teken in de rechter figuur de van rechts komende lichtbundel die na reflectie in het hologram samenkomt in punt B.

Opgave 3

In de onderstaande figuur wordt een transmissiehologram belicht vanuit lichtpunt L.
De streepjes in het hologram stellen spiegelende oppervlakjes voor.

Teken tenminste drie lichtstralen vanuit L die op het hologram vallen. Teken de weerkaatste lichtstralen. Verleng eventueel eerst de streepjes in het hologram. Ga na waar het beeldpunt zich bevindt.



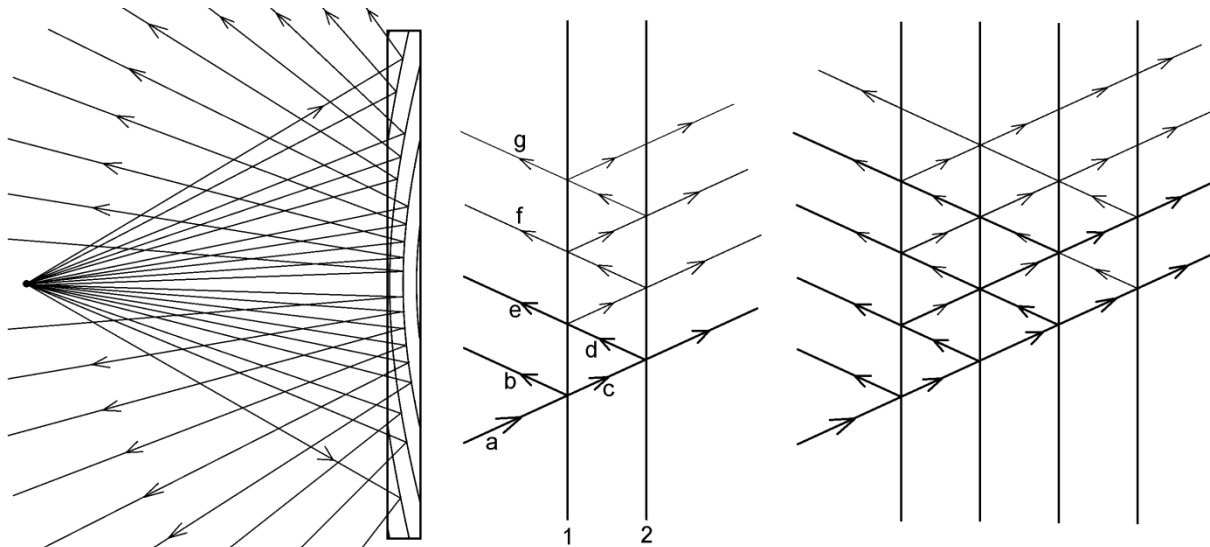
L •

§ 5 Bragg-reflectie bij het uitlezen van reflectiehologrammen

Reflecties binnen een reflectiehologram

Zoals in de vorige paragraaf is uitgelegd, bevat een hologram na het ontwikkelen vlakken die gedeeltelijk reflecterend zijn. In de onderstaande linker figuur is met de stralenbenadering weergegeven hoe het licht door deze spiegelende oppervlakken wordt weerkaatst bij het uitlezen van een reflectiehologram. De huidige paragraaf gaat op het weerkaatsten van licht iets dieper in. Daarbij staat het golfkarakter van licht centraal.

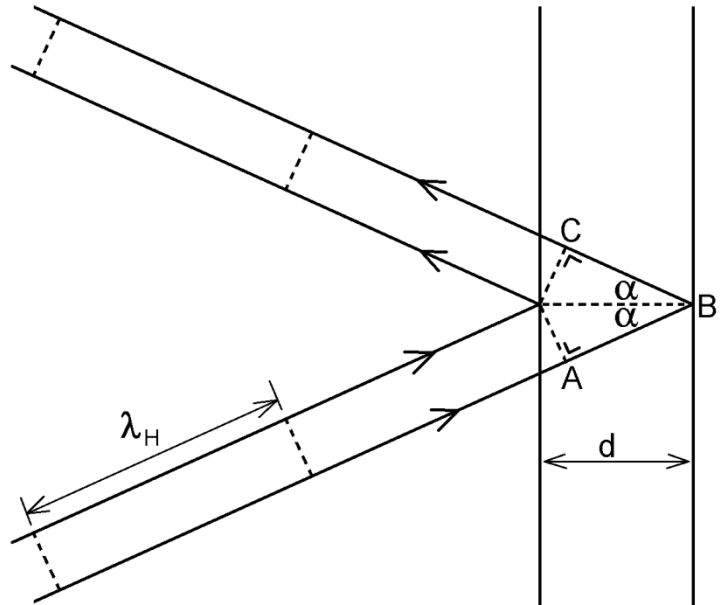
In de middelste figuur zijn twee gedeeltelijk reflecterende oppervlakken binnen een hologram getekend. Lichtstraal a wordt door reflectievlak 1 voor een deel teruggekaatst (straal b) en voor een deel doorgelaten (straal c). Deze doorgelaten straal wordt door reflectievlak 2 ook voor een deel teruggekaatst (straal d) en voor een deel doorgelaten. De teruggekaatste straal (d) wordt ook weer voor een deel teruggekaatst en voor een deel doorgelaten (straal e). Op deze manier ontstaan er een aantal lichtstralen (b, e, f, g enzovoort) die naar links bewegen. Zoals hierna wordt besproken, versterken deze lichtstralen elkaar alleen onder een bepaalde voorwaarde, namelijk als voldaan is aan de wet van Bragg.



In de rechter figuur zijn vier gedeeltelijk reflecterende vlakken binnen een hologram getekend. Het licht wordt door elk volgende reflecterende oppervlak ook weer voor een deel teruggekaatst. Hoe meer (gedeeltelijk) reflecterende vlakken er zijn, des te sterker het van links komende licht wordt teruggekaatst. Uiteraard moet hierbij weer aan de hierna te behandelen wet van Bragg worden voldaan.

Wet van Bragg

In de figuur hiernaast zijn twee reflecterende oppervlakken binnen een reflectiehologram als verticale lijnen getekend. Voor de eenvoud zijn de andere reflecterende oppervlakken weggelaten. Er valt een evenwijdige lichtbundel onder invalshoek α op de twee oppervlakken. De stippellijnen die loodrecht op de bundel staan, geven de golfmaxima (golfbergen) van het licht weer. De afstand tussen deze golfmaxima is de golflengte λ_H van het licht binnen het hologram. De afstand d tussen



de reflecterende oppervlakken is in het algemeen kleiner dan λ_H . Dus speelt het golfkarakter van licht een grote rol. In de figuur is afstand $AB+BC$ gelijk aan λ_H . In dat geval versterken de gereflecteerde golven elkaar en wordt de lichtbundel maximaal teruggekaatst. Hetzelfde geldt als afstand $AB+BC$ gelijk is aan een veelvoud van λ . Omdat $(AB + BC) = 2d \cdot \cos(\alpha)$ geldt de volgende voorwaarde voor maximale reflectie.

$$2d \cdot \cos(\alpha) = m \cdot \lambda_H$$

Hierin is m een natuurlijk getal (1, 2, 3, ...).

We noemen deze formule de wet van Bragg.

We kunnen de golflengte λ_H binnen het hologram als volgt uitdrukken in de golflengte λ in vacuüm.

$$\lambda_H = \frac{\lambda}{n}.$$

Hierin is n de brekingsindex van de emulsie. Deze geeft aan hoeveel keer de lichtsnelheid in vacuüm groter is dan die in het hologram.

De belichting bij het uitlezen van een reflectiehologram

Stel dat je een reflectiehologram op precies dezelfde manier belicht als ten tijde van het maken van het hologram met de referentiebundel. Dat houdt gelijke invalshoeken en gelijke golflengtes in. Aan de bovenstaande wet van Bragg is dan zeker voldaan en het uitlezen van het hologram is dan optimaal. Zie de bijlage voor het bewijs. Daarbij is wel aangenomen dat de lichtgevoelige emulsie tijdens het ontwikkelen niet is gekrompen. Als dat wel het geval zou zijn, zou de golflengte van het licht ter compensatie iets kleiner moeten zijn.

Dankzij de bovenstaande wet van Bragg heeft een hologram een zekere kleurensselectiviteit. Met name worden de kleuren teruggekaatst, waarvan de golflengte λ_H volgens de wet van Bragg voldoet aan:

$$\lambda_H = \frac{2d \cdot \cos(\alpha)}{m}.$$

Als je bijvoorbeeld een reflectiehologram beschijnt met wit licht (maar onder dezelfde hoek als bij de referentiebundel tijdens het maken van het hologram), zal het voorwerp met name zichtbaar zijn in de kleur waarmee het hologram gemaakt is. Alle andere kleuren worden niet of nauwelijks teruggekaatst.

Opgaven bij § 5

Opgave 1

Hoe luidt de wet van Bragg?

Opgave 2

Stel dat een reflectiehologram van een voorwerp met wit licht wordt beschenen vanuit de juiste invalshoek. Je ziet het voorwerp dan toch in de kleur waarmee het hologram gemaakt is. Leg dat uit.

Opgave 3

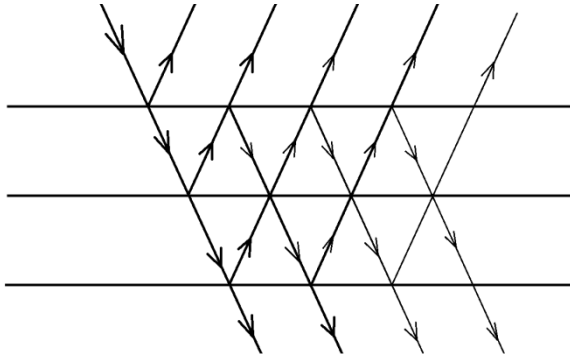
Sommige vogels hebben blauwe veren. Dat wil zeggen dat deze veren alleen blauw licht reflecteren. Deze kleur is niet het gevolg van blauw pigment want dit komt in de natuur niet of nauwelijks voor. Bedenk een andere oorzaak van de blauwe kleur.

Opgave 4

Er valt licht met een golflengte van 500 nm op een hologram. Binnenin het hologram bedraagt de brekingsindex 1,4. Bereken de golflengte van het licht in het hologram.

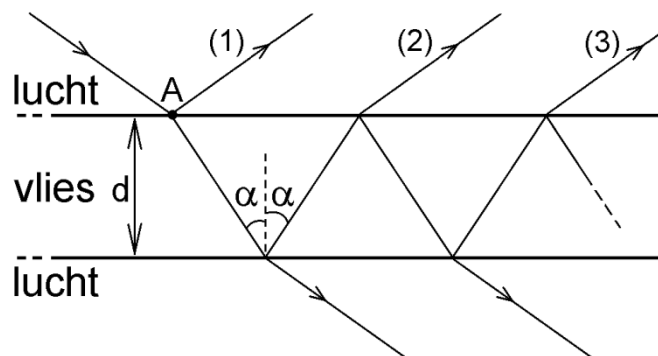
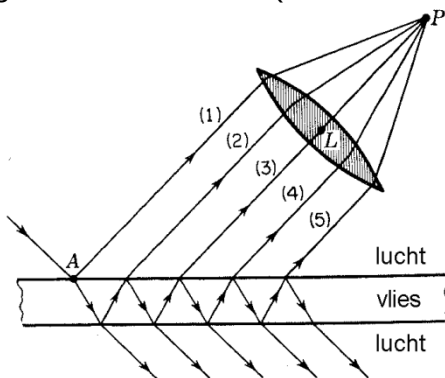
Opgave 5

In de onderstaande figuur wordt licht binnen een reflectiehologram door drie evenwijdige equidistante vlakken gedeeltelijk teruggekaatst. De invalshoek bedraagt 24° . De maximale golflengte (binnen het hologram!) met maximale terugkaatsing door de vlakken is 425 nm. Bereken de afstand tussen de vlakken.



Opgave 6

Bij het bellen blazen nemen de bellen allerlei kleuren aan. Zie de onderstaande figuren met rechts de uitvergroting van het vlies van de bel. Een lichtstraal valt bij punt A op het vlies. Een deel van het licht wordt teruggekaatst (lichtstraal 1) en een ander deel wordt doorgelaten. Zoals in de figuren is getekend, wordt het doorgelaten licht opnieuw een aantal keren gedeeltelijk teruggekaatst en gedeeltelijk doorgelaten. Lens L stelt de ooglenzen voor en P het netvlies van het oog. In P komt het gereflecteerde licht (lichtstralen 1, 2, 3 enzovoort) samen.



Voor de kleuren die maximaal worden teruggekaatst, gelden de volgende formules.

$$2d \cdot \cos(\alpha) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda_v \quad \text{met} \quad \lambda_v = \frac{\lambda}{n}$$

Hierin zijn d en n de dikte en de brekingsindex van het zeepbelvlies en α de hoek van inval binnen het vlies. Verder zijn λ_v en λ de golflengte van het licht in het vlies en in lucht (of vacuüm). De letter m stelt een geheel getal voor (0, 1, 2, 3, ...). Je zou m de 'orde' van het teruggekaatste licht kunnen noemen. Merk op dat de formule de term $1/2$ bevat die niet in de formule van Bragg voorkomt. Deze term houdt verband met de fasesprong van $1/2$ die alleen optreedt bij de reflectie van lucht naar het vlies en dus alleen gevolgen heeft voor lichtstraal 1.

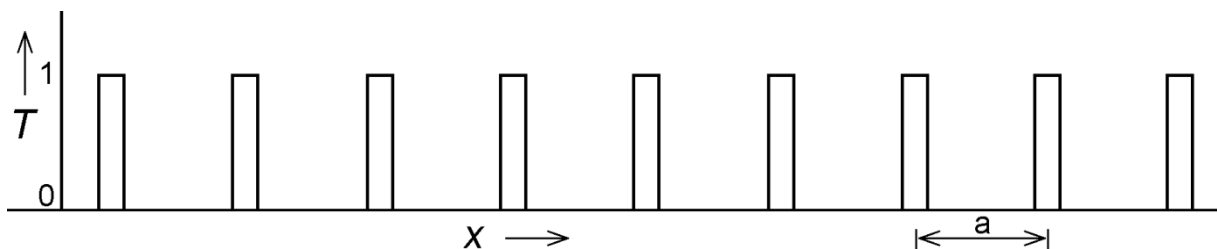
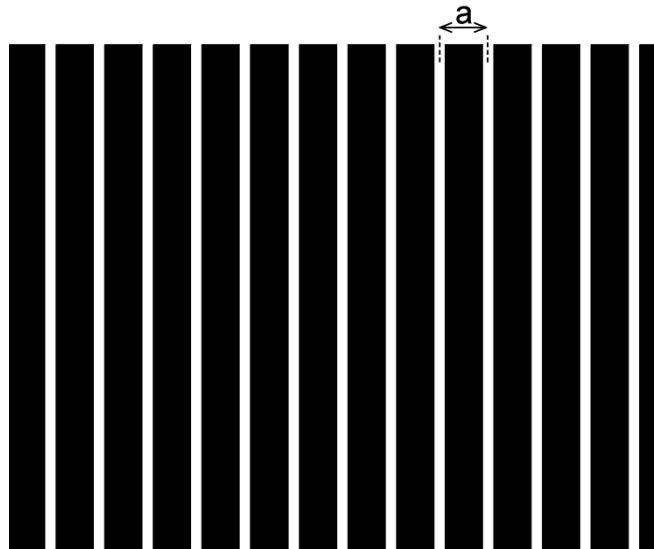
Stel dat $d = 0,15 \mu\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$ en $n = 1,3$. Bereken dan de maximale golflengte λ van het licht waarbij maximale reflectie plaats vindt.

§ 6 Diffractie bij een binair tralie (vooruitlopend op § 8)

Binair tralie

Een binair tralie bevat afwisselend transparante en ondoorzichtige banen, zoals hiernaast sterk vergroot is weergegeven. De afstand tussen de (middens van de) transparante banen wordt de tralieconstante a genoemd. De doorlaatbaarheid T van de transparante (witte) banen is (bij benadering) 1 en die van de ondoorzichtige (zwarte) banen 0.

In het volgende diagram is de doorlaatbaarheid T als discontinue functie van de plaats x weergegeven. Hierbij staat de x -as loodrecht op de banen. Uiteraard is de periode van de grafiek gelijk aan de tralieconstante a .



Transmissie van een binair tralie

Als je een laserstraal op een tralie laat vallen, zal het doorgelaten licht niet alleen rechtdoor gaan maar ook afbuigen in verschillende richtingen. We noemen dit diffractie en is regelrecht het gevolg van het golfkarakter van licht. In de onderstaande linker figuur valt een evenwijdige monochromatische lichtbundel onder een hoek α op een binair tralie. De invallende lichtbundel wordt dan door het tralie gesplitst in een aantal uittrekkende lichtbundels. Elke bundel geven we ter onderscheid een eigen nummer n : de zogenoemde orde. De rechtdoorgaande bundel heeft orde 0, de aangrenzende afgebogen bundels orde 1 en -1 enzovoort. De orde van een bundel is des te hoger (positief of negatief) naarmate zijn voortplantingsrichting sterker afwijkt van die van de invallende bundel.

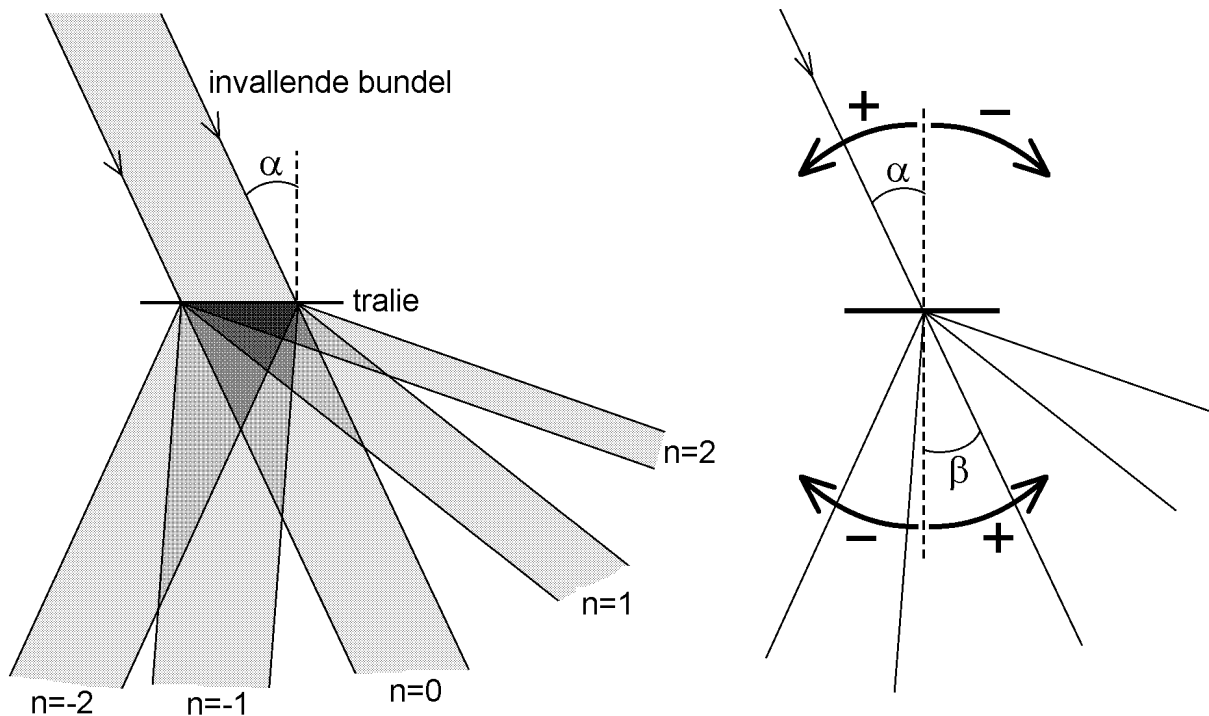
In de onderstaande rechter figuur zijn de lichtbundels voor de eenvoud als lijnen getekend. De hoek tussen de invallende bundel en de normaal is α en de hoek tussen een doorgelaten bundel en de normaal is β . Hierbij moet goed op het teken van α en β gelet worden. Zie de aangegeven richtingen in de figuur. De hoek β van de doorgelaten bundel met orde n kan met de volgende formule berekend worden.

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha) = n \cdot \frac{\lambda}{a}$$

In deze formule is λ de golflengte en a de tralieconstante.

Merk op dat als de invallende bundel loodrecht op het tralie staat, de formule vereenvoudigd kan worden tot de oude vertrouwde formule:

$$\sin(\beta) = n \cdot \frac{\lambda}{a}$$



Getallenvoorbeeld

Een laserstraal met een golflengte van 550 nm valt onder een hoek van 30° op een binair tralie met een tralieconstante van $2,0 \mu\text{m}$. Er geldt: $\lambda / a = 0,55 / 2,0 = 0,275$. De nulde orde doorgelaten bundel maakt een hoek van 30° met de normaal.

Voor de eerste orde bundels ($n = 1$ en $n = -1$) geldt:

Voor $n = 1$: $\sin(\beta) = \sin(30^\circ) + 0,275 = 0,775 \Rightarrow \beta = 51^\circ$

Voor $n = -1$: $\sin(\beta) = \sin(30^\circ) - 0,275 = 0,225 \Rightarrow \beta = 13^\circ$

Bewijs van de formule

De bovenstaande formule is eenvoudig te bewijzen. Zie de figuur hiernaast waarin een klein stukje van het tralie en vier golfstralen zijn getekend. Het weglengteverschil tussen twee aangrenzende stralen bedraagt

$$s_2 - s_1.$$

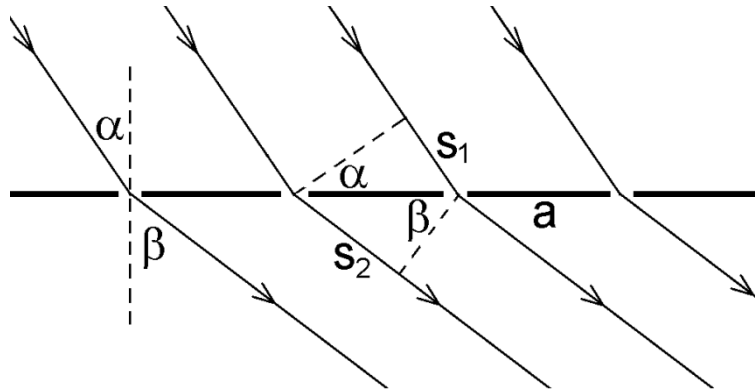
Dit is gelijk aan:

$$a \cdot \sin(\beta) - a \cdot \sin(\alpha).$$

Versterking treedt op als dit weglengteverschil gelijk is aan een geheel aantal golflengtes. Aldus moet er gelden:

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha) = \frac{n \cdot \lambda}{a}.$$

Dit is de eerder gegeven formule.



Opgaven bij § 6

Opgave 1

Een laserstraal met een golflengte van $0,50\text{ }\mu\text{m}$ valt loodrecht op een binair tralie met een tralieconstante van $1,30\text{ }\mu\text{m}$.

a.

Bereken de hoeken waaronder licht uittreedt (gerekend ten opzichte van de normaal op het tralie).

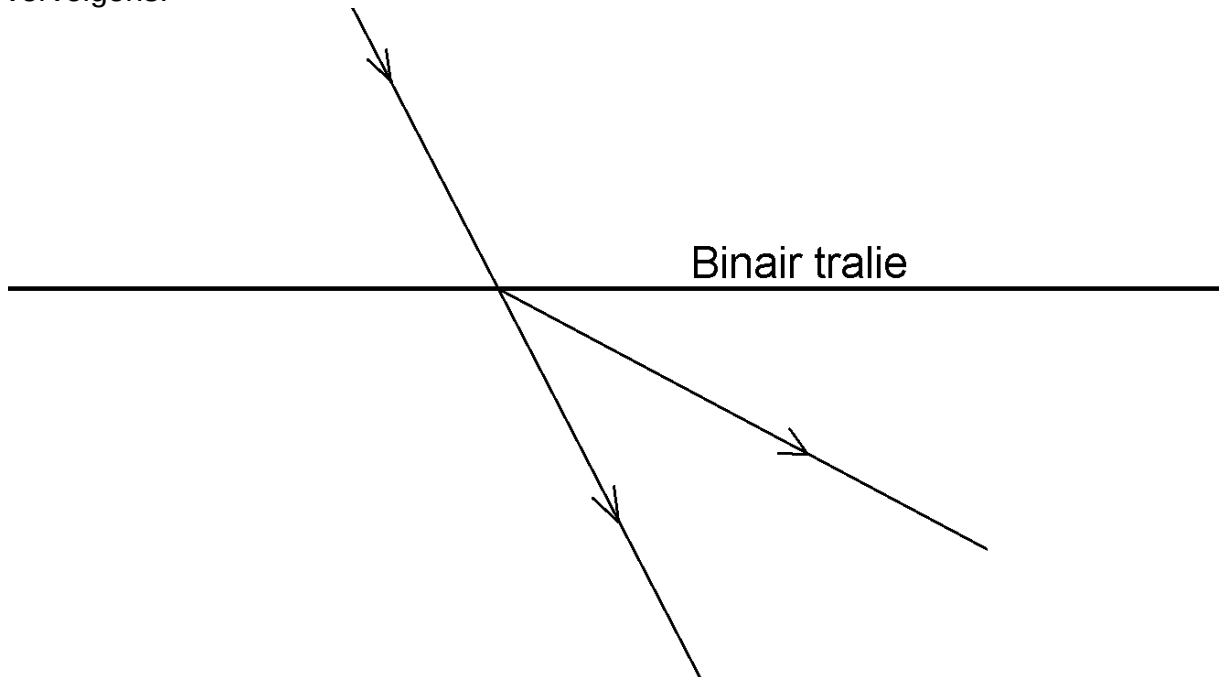
Nu valt de laserstraal niet loodrecht op het tralie in maar onder een hoek van 30° . (weer gerekend ten opzichte van de normaal op het tralie).

b.

Bereken in deze nieuwe situatie de hoeken waaronder het licht uittreedt.

Opgave 2

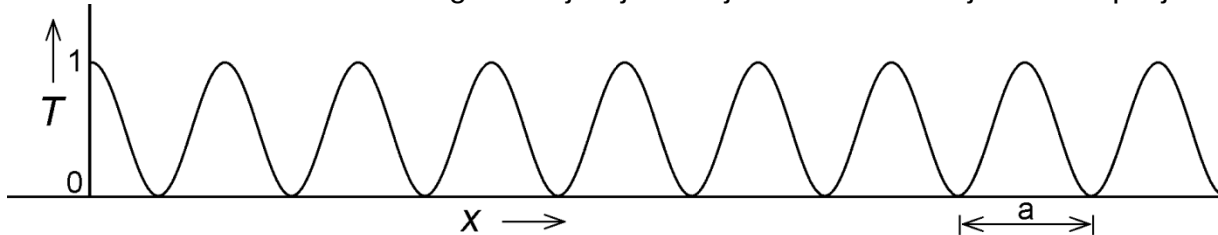
In de onderstaande figuur valt een laserstraal op een binair tralie. Twee uittredende lichtbundels zijn getekend. Hierbij heeft de niet rechtdoorgaande lichtbundel orde 1. Bepaal de andere hoeken waaronder lichtstralen uittreden. Teken deze lichtstralen vervolgens.



§ 7 Diffractie bij een cosinustralie (vooruitlopend op § 8)

Cosinustralie

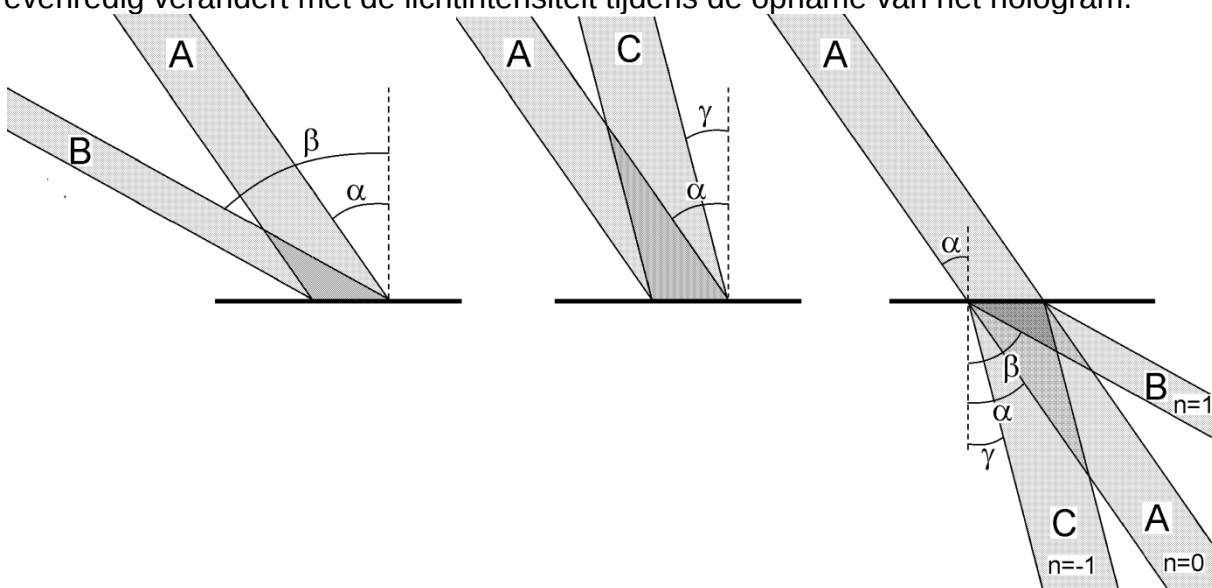
Bij een cosinustralie verandert de doorlaatbaarheid T continu als functie van x . Dit is in het onderstaande diagram weergegeven. Het verschil tussen een cosinustralie en een binair tralie is dat bij de eerstgenoemde de overgangen van doorlaatbaar naar niet doorlaatbaar en andersom geleidelijk zijn en bij een binair tralie juist scherp zijn.



De periode van de doorlaatgrafiek is met a aangegeven. Deze is te vergelijken met de tralieconstante van een binair tralie. Overigens is de term 'cosinustralie' niet algemeen en wordt alleen hier gebruikt.

Een cosinustralie maken en uitlezen (zie ook de bijlagen)

In de onderstaande linker figuur wordt een holografische plaat beschenen door twee evenwijdige monochromatische coherente lichtbundels A en B. De twee bundels hebben dezelfde golflengte en dezelfde intensiteit. De hoeken tussen de bundels en de normaal zijn met α en β aangegeven waarbij β groter is dan α . In het gebied op de holografische plaat waarbij de bundels elkaar overlappen, ontstaat een interferentiepatroon. Langs de plaat, evenwijdig aan het vlak van tekening, verloopt de intensiteit (co)sinusvormig zoals in het bovenstaande diagram is weergegeven. Als de holografische plaat na de belichting wordt ontwikkeld, ontstaat er een cosinustralie. Een voorwaarde hierbij is wel dat de plaatselijke doorlaatbaarheid evenredig verandert met de lichtintensiteit tijdens de opname van het hologram.



In de middelste figuur vallen ook twee evenwijdige lichtbundels A en C op de holografische plaat. Lichtbundel A heeft dezelfde invalshoek α als in de linker figuur; lichtbundel C heeft invalshoek γ die kleiner is dan α . Bij een bepaalde invalshoek γ is het interferentiepatroon in de middelste figuur gelijk aan dat in de linker figuur. Zoals we iets verderop in deze paragraaf zullen aantonen, moet dan voor γ gelden:

$$\sin(\gamma) = 2 \cdot \sin(\alpha) - \sin(\beta).$$

Als hieraan voldaan is, zal het ontstane cosinustralie in de middelste figuur (na het ontwikkelen van de holografische plaat uiteraard) gelijk zijn aan het ontstane cosinustralie in de linker figuur.

In de rechter figuur wordt het cosinustralie, dat in de linker of middelste figuur gemaakt is, uitgelezen. Er valt één lichtbundel A op het cosinustralie. De invalshoek α van bundel A is weer gelijk aan die in de twee eerdere figuren. Er blijken nu drie lichtbundels A, B en C uit het tralie te treden. Bundel A gaat in dezelfde richting verder als de invallende bundel (die ook met A is aangeduid). Bundel B en C zijn afgebogen bundels. Bundel B heeft dezelfde richting als bundel B in de linker figuur en bundel C heeft dezelfde richting als bundel C in de middelste figuur.

Verband tussen hoeken, golflengte en tralieconstante

De volgende formule is toepasbaar op elk van de bovenstaande gevallen.

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha) = n \cdot \frac{\lambda}{a} \text{ met } n = 0, +1 \text{ of } -1$$

Bij het uitlezen van een cosinustralie (zie de bovenstaande rechter figuur) is α de invalshoek en β de afbuighoek. De uittredende lichtbundel A hoort bij $n = 0$. De uittredende lichtbundel B hoort bij $n = 1$ en de uittredende lichtbundel C hoort bij $n = \text{min } 1$. Merk op dat dezelfde formule ook van toepassing is op een binair tralie. Het enige verschil is dat er daar ook hogere orde uittredende bundels zijn (bijvoorbeeld $n = 2$ of -2). Kennelijk heeft bij een cosinustralie de geleidelijke overgang van doorlaatbaar naar niet doorlaatbaar en andersom tot gevolg dat de hogere orde uittredende bundels niet optreden.

Bij het maken van een cosinustralie (zie de bovenstaande linker en middelste figuur) zijn zowel α en β hoeken van inval. Bundel B hoort bij $n = 1$ en bij bundel C hoort bij $n = \text{min } 1$. Om beide cosinustralies aan elkaar gelijk te laten zijn, geldt de eerder genoemde eis voor γ :

$$\sin(\gamma) = 2 \cdot \sin(\alpha) - \sin(\beta)$$

Deze eis volgt regelrecht uit de vergelijkingen:

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a} \text{ en } \sin(\gamma) - \sin(\alpha) = -\frac{\lambda}{a}.$$

Amplitude- en fasehogrammen

Het uitgangspunt in deze paragraaf was dat het interferentiepatroon door de holografische plaat wordt vastgelegd als een licht/donker verdeling. Een deel van het licht van de reconstructiebundel wordt dan door het hologram geabsorbeerd. We spreken in dit geval van een amplitudehologram. Een groot nadeel hiervan is dat het waargenomen beeld lichtzwak is. Holografisch materiaal kan echter ook, na het ontwikkelproces, geheel doorzichtig zijn. Het interferentiepatroon wordt dan vastgelegd als een dikteverdeling van de emulsielaag of als een verdeling in de grootte van de brekingsindex. Er gaat dan minder licht verloren en het beeld is helderder. Een hologram dat het interferentiepatroon op deze manier heeft vastgelegd heet een fasehologram.

Opgaven bij § 7

Opgave 1

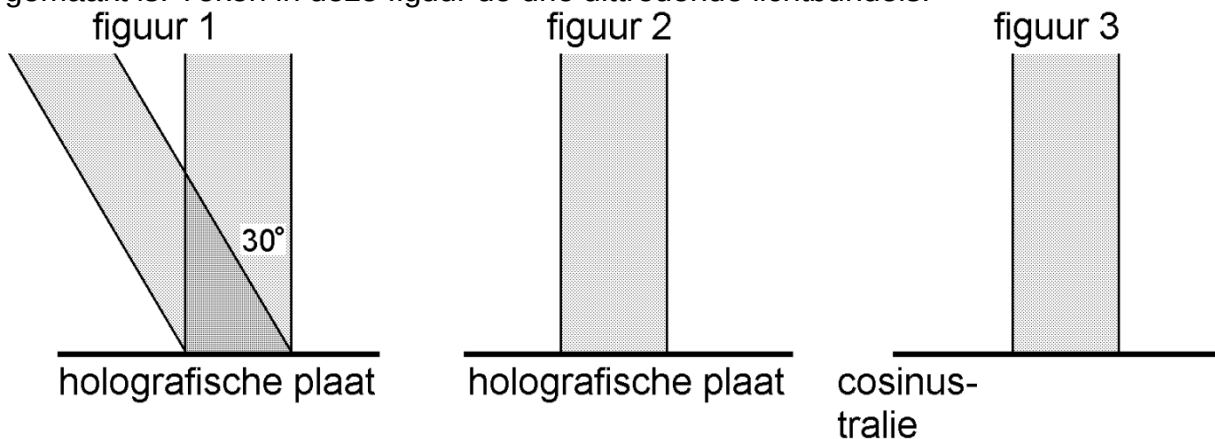
Noem de twee belangrijkste verschillen tussen een binair tralie en een cosinustralie.

Opgave 2

In de onderstaande figuur 1 wordt een holografische plaat beschenen met twee coherente lichtbundels. De ene lichtbundel valt loodrecht op de plaat en de andere onder een hoek van 30° . Na het ontwikkelen ontstaat er een cosinustralie.

Teken in figuur 2 een tweede invallende lichtbundel die samen met de loodrecht invallende lichtbundel hetzelfde cosinustralie geeft als in figuur 1.

In figuur 3 valt er een lichtbundel loodrecht op het cosinustralie dat in figuur 1 gemaakt is. Teken in deze figuur de drie uittredende lichtbundels.



Opgave 3

In de onderstaande figuur 1 wordt een holografische plaat beschenen met twee coherente lichtbundels. De ene lichtbundel valt onder een hoek van 10° op de plaat en de andere onder een hoek van 30° . Na het ontwikkelen ontstaat er een cosinustralie.

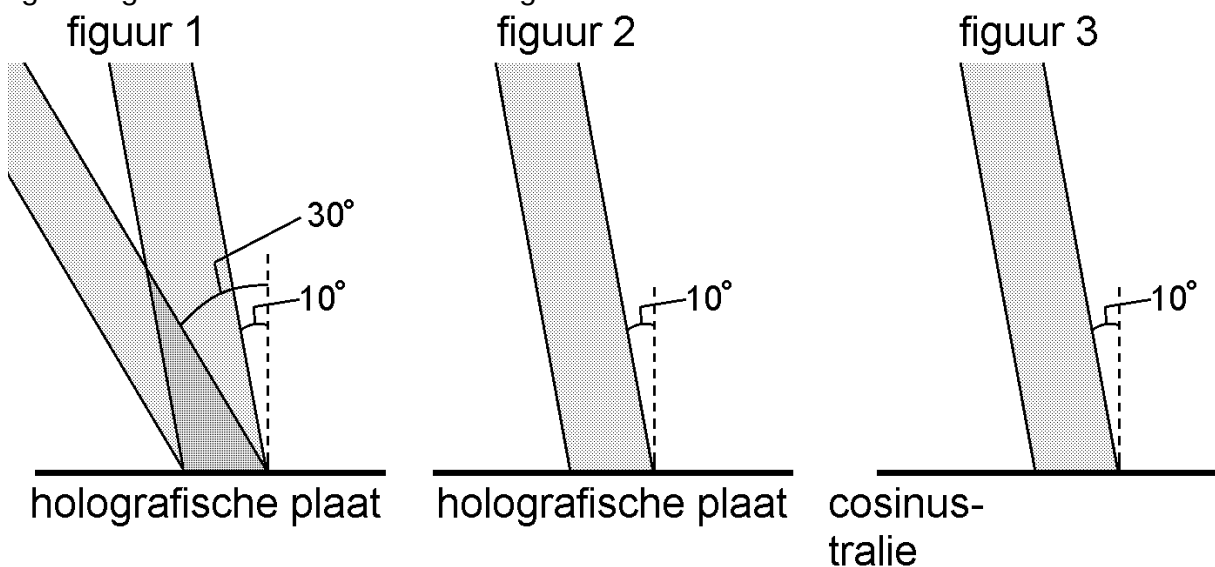
In figuur 2 wordt een identiek cosinustralie gemaakt als in figuur 1. Alleen valt één lichtbundel onder een andere hoek op de holografische plaat.

a.

Bereken onder welke hoek de tweede lichtbundel in figuur 2 op het tralie moet vallen. Teken deze bundel vervolgens in de figuur.

b.

In figuur 3 valt er een lichtbundel onder een hoek van 10° op het cosinustralie dat in figuur 1 gemaakt is. Teken in deze figuur de drie uittredende lichtbundels.



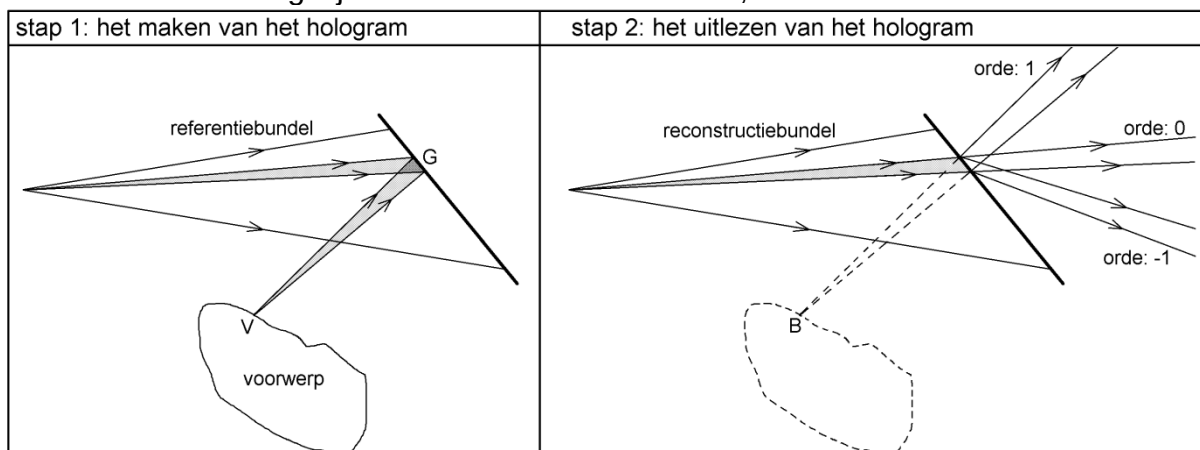
§ 8 Diffractie bij het uitlezen van transmissiehogrammen

Diffractie bij een transmissiehologram

Als je een laserstraal op een tralie laat vallen, zal het doorgelaten licht niet alleen rechtdoor gaan maar ook afbuigen in verschillende richtingen. We noemen dit diffractie. Uiteraard is een transmissiehologram geen tralie, maar het licht dat op een transmissiehologram valt, gaat ook door de 'openingen' van het hologram heen. Het doorgelaten licht zal dan net zo goed afbuigen. Het ligt daarom voor de hand om diffractie als uitgangspunt voor de analyse van een transmissiehologram te nemen. We gaan er daarbij vanuit dat de dikte van het hologram klein is ten opzichte van de golflengte van het licht.

Cosinustralies in een dun transmissiehologram

In de onderstaande figuren is V een willekeurig punt van het voorwerp. In eerste instantie laten we de andere voorwerpspunten even buiten beschouwing. Bij het maken van het hologram (stap 1) wordt gebiedje G beschenen door de referentiebundel en door licht dat van voorwerpspunt V vertrekt. We nemen in deze paragraaf aan dat de plaatselijke doorlaatbaarheid lineair verandert met de lichtintensiteit tijdens de opname van het hologram. In G ontstaat dan na het ontwikkelen van de holografische plaat een cosinustralie als we aannemen dat G voldoende klein is zodat je kunt aannemen dat elk van de invallende bundels evenwijdig is. Bij het uitlezen van het hologram (stap 2) valt de reconstructiebundel op gebiedje G. Uit het cosinustralie vertrekken er dan drie lichtbundels, namelijk de rechtdoorgaande bundel (nulde orde) en twee afgebogen bundels met orde één en min één. De eerste orde bundel lijkt uit beeldpunt B te komen. Als de reconstructiebundel gelijk is aan de referentiebundel, vallen V en B samen.



In werkelijkheid bestaat het voorwerp uit vele voorwerpspunten. Elk gebiedje (G) van het hologram bestaat dan dus uit een zeer groot aantal cosinustralies, die dwars over elkaar heen liggen. Elk cosinustralie binnen een gebiedje hoort bij één voorwerpspunt.

Bij het bekijken van het beeld van het voorwerp door het hologram laat je de eerste orde lichtbundels in je oog vallen. Je ziet dan het voorwerp op zijn oorspronkelijke plaats als de puntbronnen van de referentie- en reconstructiebundel samenvallen. De lichtbundels met orde min één zorgen voor het zogenoemde geconjungeerde (= samengevoegde, gekoppelde) beeld.

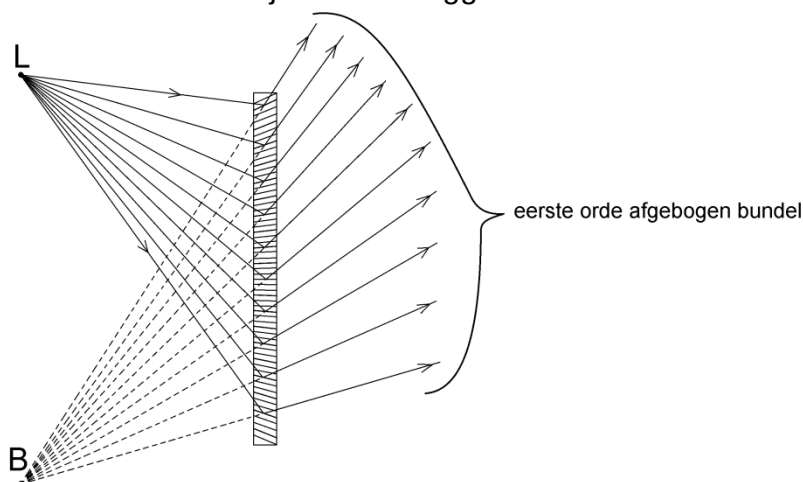
Vergelijking tussen het geometrische model en het diffractiemodel

Bij een transmissiehologram kunnen we het geometrische model (paragraaf 4) vergelijken met het diffractiemodel (deze paragraaf). Beide modellen geven een verklaring voor het feit dat je, als je tegen het doorgelaten licht inkijkt, het oorspronkelijke voorwerp terug ziet. In het geometrische model was de terugkaatsing tegen de (deels) reflecterende buikvlakken hiervoor verantwoordelijk. In het diffractiemodel is de eerste orde afgebogen bundel hiervoor verantwoordelijk.

Als de reconstructiebundel wit licht zou bevatten, zou volgens het diffractiemodel het voorwerp uitgesmeerd worden omdat de afbuighoek afhangt van de golflengte. Hoe groter de golflengte, des te groter de afbuighoek is. Daarom moet het uitlezen van een transmissiehologram met monochromatisch licht bij voorkeur gebeuren met dezelfde golflengte als die van de referentiebundel.

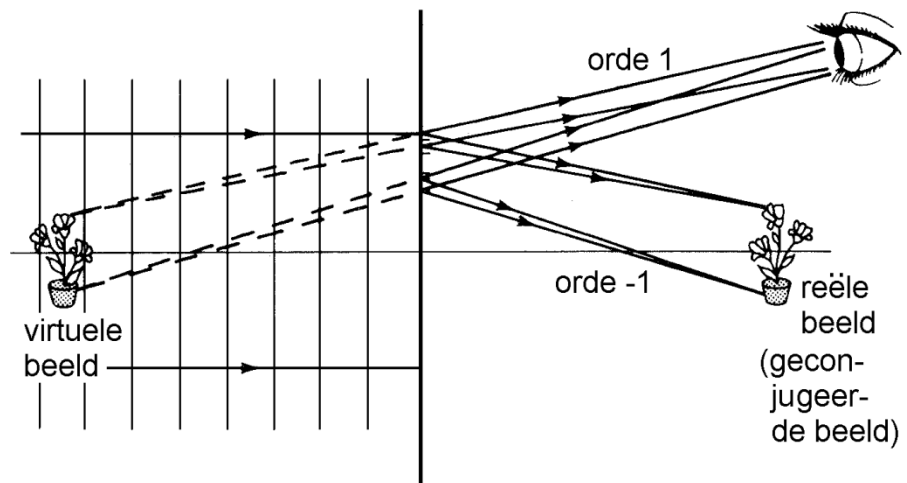
In beide modellen gaat een deel van de reconstructiebundel rechtdoor. In het geometrische model is er sprake van (buik)vlakken die het licht slechts voor een deel terugkaatsen. Voor het andere deel gaat het licht rechtdoor. In het diffractiemodel gaat de nulde orde bundel rechtdoor.

Volgens het diffractiemodel ontstaat er ook een 'geconjugeerd' beeld dat bij de afgebogen bundel met orde -1 hoort. In het geometrische model ontstaat er géén geconjugeerd beeld. In de praktijk is het geconjugeerde beeld meestal moeilijk te zien omdat de lichtgevoelige emulsielaag van de holografische plaat niet dun is maar minstens zo'n zes golflengtes dik is. De reflecterende laagjes versterken alléén de eerste orde afgebogen lichtbundel. Zie hierbij de onderstaande schematische figuur waarbij de werking van de reflecterende laagjes getoond wordt. In de bijlage wordt bewezen dat hierbij aan de Bragg-voorwaarde voldaan wordt.



Geconjugeerde beeld

In de figuur hiernaast kijkt iemand naar het beeld van een plant dat gevormd wordt door het hologram. Tijdens de opnamefase was de referentiebundel evenwijdig en viel hij loodrecht op de holografische plaat. Tijdens de weergavefase (die getekend is in de figuur) geldt hetzelfde voor de reconstructiebundel.



Het hologram vormt een eerste orde virtueel beeld en ook een min eerste orde geconjugerd beeld. Het eerste orde virtuele beeld bevindt zich op de plaats waar de plant zich bevond tijdens de opnamefase. Het min eerste orde geconjugerd beeld is in de figuur reëel. Beide beelden zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van het hologram. Dit laatste geldt alleen als de referentie- en reconstructiebundel evenwijdig zijn en loodrecht op de holografische plaat staan.

In de bovenstaande figuur ligt de bron van de referentie- en reconstructiebundel oneindig ver weg. Als deze bron dichterbij de holografische plaat zou liggen, bestaat de mogelijkheid dat het geconjugeerde beeld virtueel is. Hoe kleiner de afstand tussen de bron en de holografische plaat is, des te waarschijnlijker dit is.

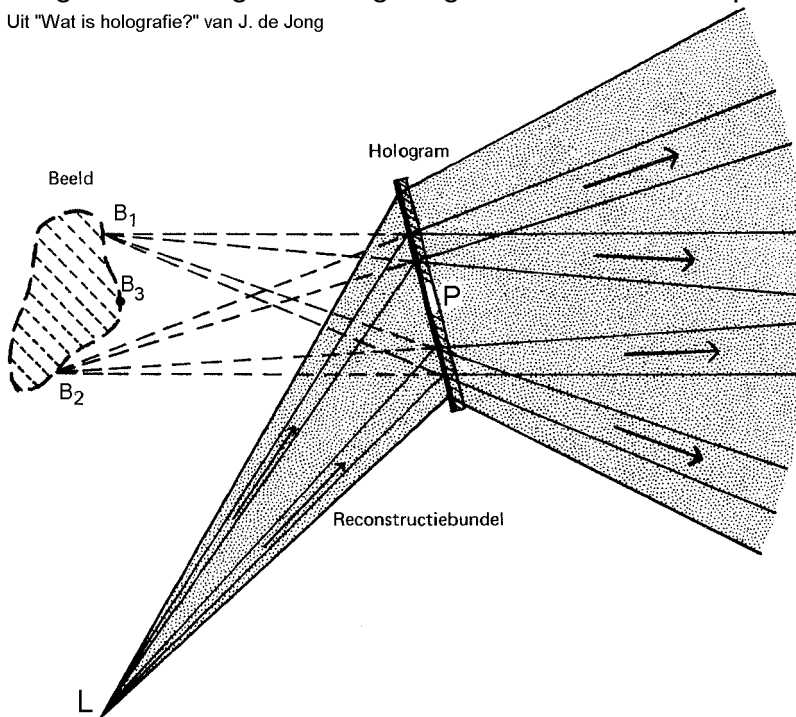
Opgaven bij § 8

Opgave 1

In de onderstaande figuur wordt een transmissiehologram uitgelezen. De reconstructiebundel is afkomstig van punt L. In de figuur zijn alleen de afgebogen bundels van de eerste orde getekend.

Teken de (smalle) lichtbundel die afkomstig is uit L en door gebiedje P van het hologram zodanig wordt afgebogen dat het uit beeldpunt B_3 lijkt te komen.

Uit "Wat is holografie?" van J. de Jong



Opgave 2

Geef van de volgende beweringen aan of ze juist of onjuist zijn.

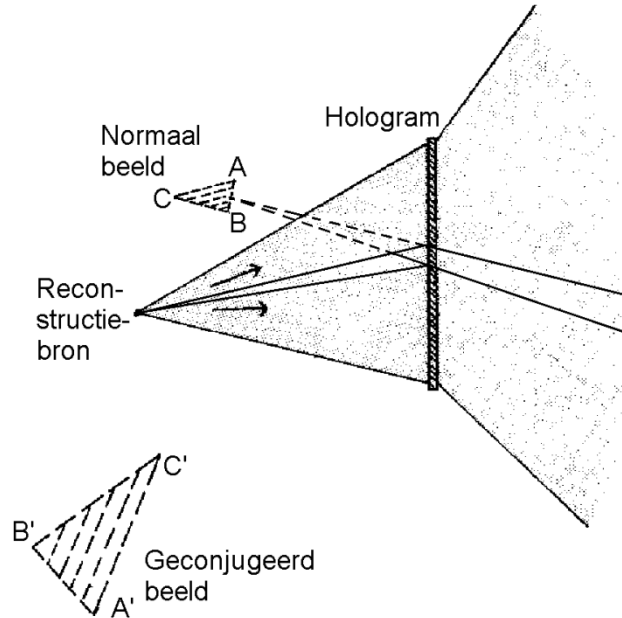
- 1)
In het geometrische model ontstaat er bij een transmissiehologram geen geconjugerd beeld van het voorwerp.
- 2)
Bij een transmissiehologram ontstaan er door diffractie in het algemeen twee beelden van het voorwerp: een beeld met orde één en een beeld met orde 'min één'.
- 3)
Volgens het geometrische model kan je een transmissiehologram belichten met wit licht (dat alle golflengtes bevat). Alle kleuren worden in dat model op dezelfde manier afgebogen.
- 4)
Volgens het diffractiemodel wordt rood licht door een transmissiehologram sterker afgebogen dan blauw licht. Ter informatie: rood licht heeft de grootste golflengte.

5)

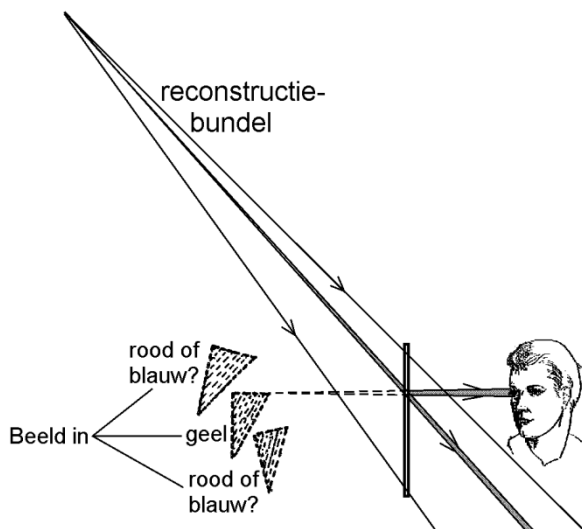
Het door een transmissiehologram gevormde eerste orde beeld en min eerste orde beeld (= geconjugeerde beeld) zijn altijd elkaars spiegelbeeld.

Opgave 3

In de figuur hiernaast wordt een transmissiehologram uitgelezen. Behalve het normale beeld ontstaat er een (virtueel) geconjugeerde beeld. Hierbij corresponderen de punten A, B en C met de punten A', B' en C'. Vanuit de reconstructiebron is een smalle lichtbundel getekend die op het hologram valt. Voorbij het hologram gaat deze lichtbundel in drie richtingen verder. Eén richting is in de figuur reeds getekend. Teken de andere twee richtingen.



Opgave 4

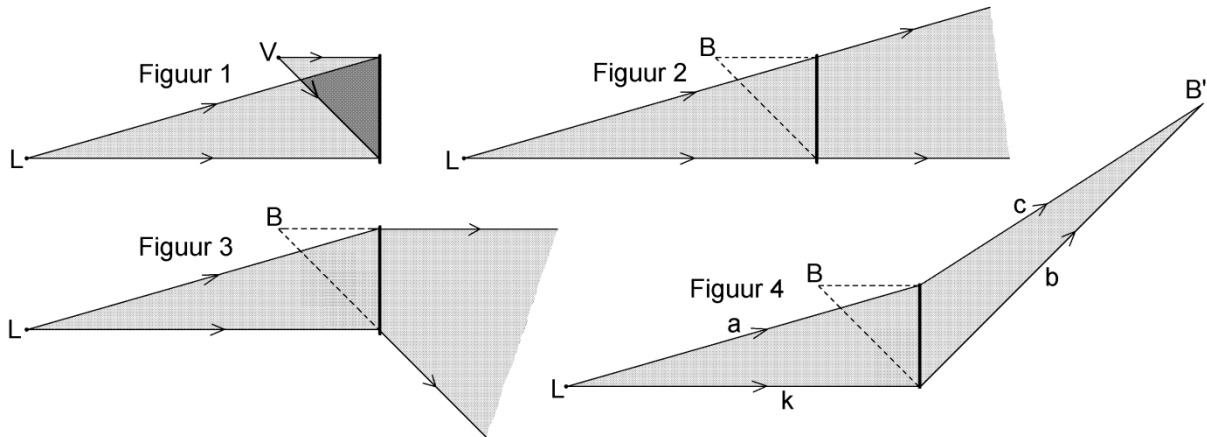


In de figuur hiernaast wordt een transmissiehologram achtereenvolgens uitgelezen met een rode lichtbundel, een gele lichtbundel en een blauwe reconstructiebron. Bij elke kleur bevindt het beeld van een driehoekig voorwerp zich op een andere plaats. In de figuur is bij geel licht één afgebogen (eerste orde) lichtbundel weergegeven.

Is het bovenste beeld rood of blauw?
Is het onderste beeld rood of blauw?

Opgave 5

In de onderstaande figuren wordt een transmissiehologram van één lichtgevend voorwerpspunt V opgenomen (figuur 1) en vervolgens uitgelezen (figuren 2, 3 en 4). In figuur 2 is de nulde orde uittredende lichtbundel getekend, in figuur 3 de eerste orde bundel en in figuur 4 de min eerste orde bundel. Merk op dat in figuur 4 het geconjugeerde beeldpunt B' van V reëel is.

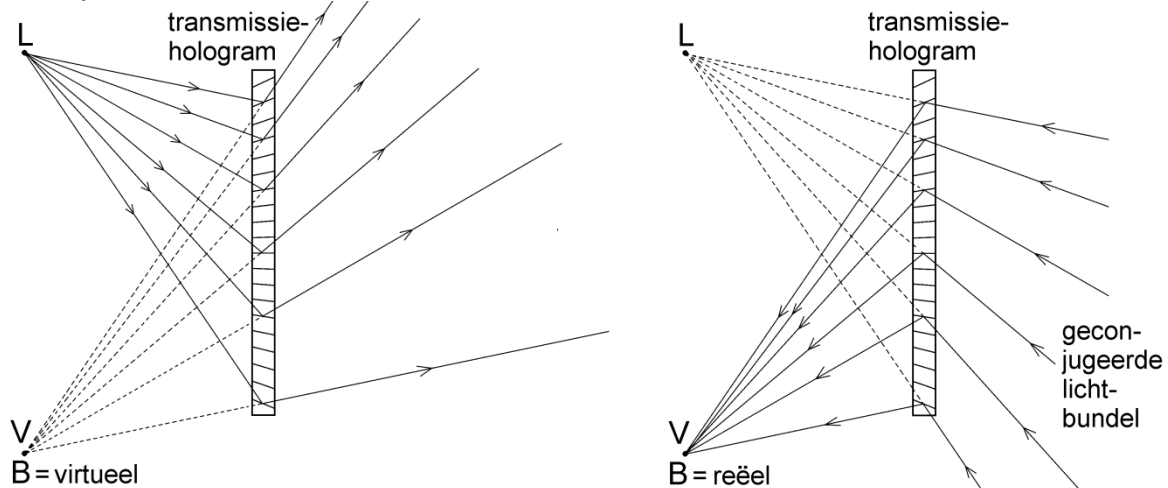


Stel dat tijdens de opname- en uitleesfase lichtbron L aanzienlijk dichterbij het hologram zou liggen. Het geconjugeerde beeldpunt B' zou dan virtueel zijn. Leg dat uit. Ga er daarbij vanuit dat de nieuwe positie van L op lijn k (die loodrecht op het hologram staat) blijft. Gebruik de letters in de figuur ter aanduiding van de lichtstralen.

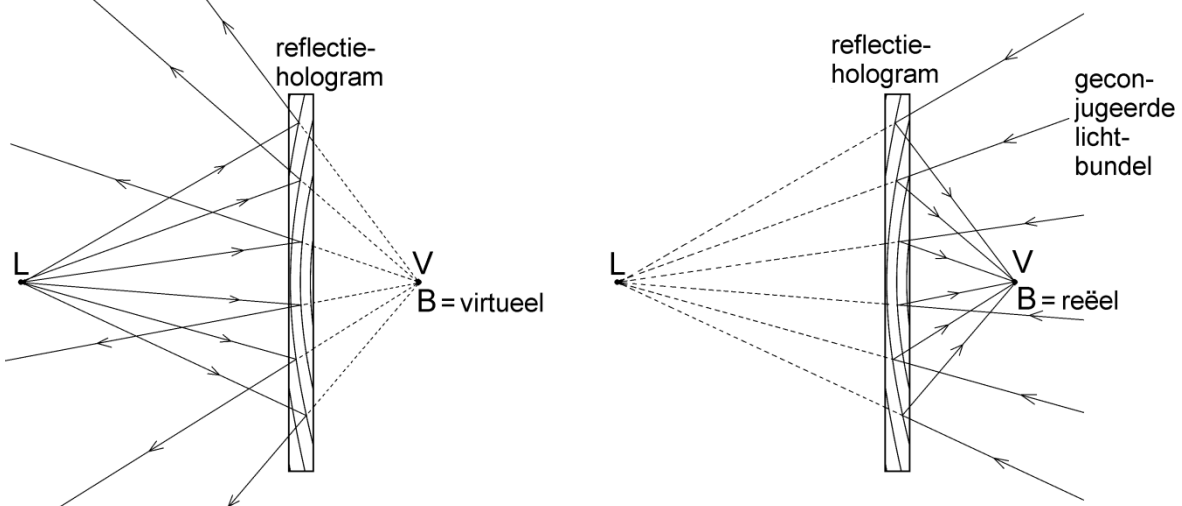
§ 9 Reëel beeld; orthoscopisch en pseudoscopisch beeld

Geconjugeerde lichtbundel en reëel beeldpunt

In de onderstaande figuren zijn twee identieke transmissiehogrammen getekend die zeer eenvoudig van aard zijn. Tijdens de opnamefase was V namelijk het enige voorwerpspunt. Verder was L de puntbron van de referentiebundel. In de linker figuur wordt het hologram uitgelezen waarbij puntbron L van de reconstructiebundel samenvalt met die van de referentiebundel. De uitredende lichtstralen gaan dan na achterwaartse verlenging door het virtuele beeldpunt B, dat samenvalt met V. In de rechter figuur valt de zogenoemde 'geconjugeerde lichtbundel' op het hologram. Kenmerkend hiervoor is dat de lichtstralen vanaf de andere zijde op het hologram vallen en in de richting van L gaan. De uitredende lichtbundel gaat dan door het beeldpunt B dat nu reëel is.

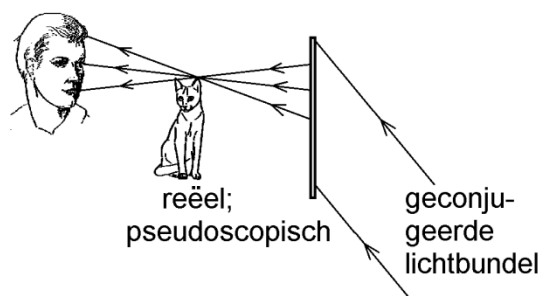
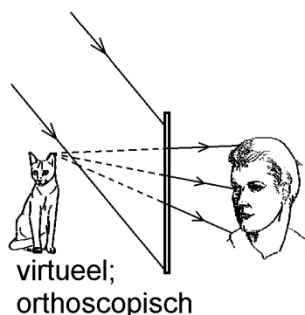


Iets soortgelijks als het bovenstaande geldt voor een reflectiehologram. Zie de onderstaande twee figuren. Nu gaat er geen licht dóór het hologram maar wordt het licht teruggekaatst. Links wordt het hologram op de 'normale' manier uitgelezen waarbij het beeldpunt B virtueel is. Rechts wordt het hologram met de geconjugeerde lichtbundel bestraald en is het beeldpunt B reëel.



Orthoscopisch en pseudoscopisch beeld

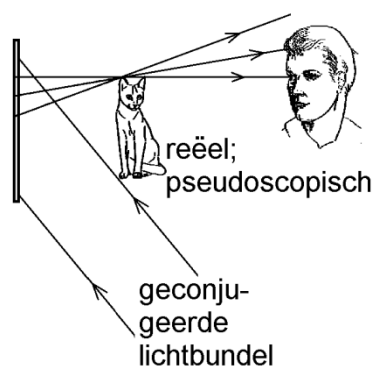
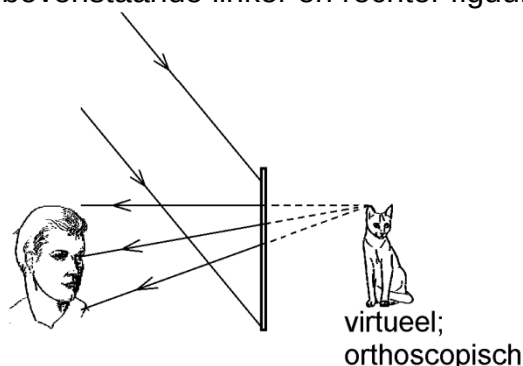
De bovenstaande gevallen kunnen we uitbreiden naar situaties van een voorwerp dat uit zeer veel voorwerpspunten bestaat. In de onderstaande figuren is een kat als voorwerp genomen. Voor het gemak nemen we een evenwijdige referentie- en reconstructiebundel. In de linker figuur wordt een transmissiehologram op de 'normale' manier uitgelezen. Het beeld van de kat is virtueel. In de rechter figuur wordt het hologram beschonen met de geconjugeerde lichtbundel, die in tegengestelde richting op het hologram valt. Er ontstaat dan een reëel beeld van de kat.



In de linker figuur geeft het beeld de kat correct weer. De voor- en achterkant zijn niet verwisseld. We spreken dan van een 'orthoscopisch' beeld. Voor de waarnemer in de rechter figuur zijn de voor- en achterkant van de kat echter wel verwisseld, of anders gezegd, de diepte van het beeld is omgekeerd. We spreken dan van een 'pseudoscopisch' beeld. Zo zijn de poten van de kat voor de waarnemer in de linker figuur het dichtste bij en in de rechter figuur het verste weg. 'Ortho' betekent correct of rechtop; 'pseudo' betekent nagemaakt of misleidend.

De rechter figuur, met het pseudoscopisch beeld, is misleidend. De achterkant van het voorwerp (de kat) is namelijk niet op het hologram vastgelegd en wordt ook bij een pseudoscopisch beeld niet weergegeven. Bij een pseudoscopisch beeld zie je de voorkant van het voorwerp als het ware vanuit de binnenkant van het voorwerp.

Het bovenstaande heeft betrekking op een transmissiehologram maar het geldt op analoge wijze voor een reflectiehologram. Dit is in de onderstaande twee figuren getoond. De onderstaande linker en rechter figuur komen overeen met de bovenstaande linker en rechter figuur.



Kijken naar een pseudoscopisch beeld

Stel dat je naar een pseudoscopisch beeld van een voorwerp kijkt. Als je je hoofd naar rechts beweegt, ga je meer van het linker (!) deel van het voorwerp zien en als je je hoofd naar beneden beweegt, ga je meer van de bovenzijde (!) van het voorwerp zien. Dit ongewone verschijnsel is het directe gevolg van de omkering van de diepte bij een pseudoscopisch beeld. Als je bijvoorbeeld in een rijdende trein zit, beweegt een boom op 30 m afstand ten opzichte van een kerktoeren op 60 m afstand naar achteren. Bij omkering van de boom en de kerktoeren keert deze relatieve beweging ook om.

Opgaven bij § 9

Opgave 1

a.

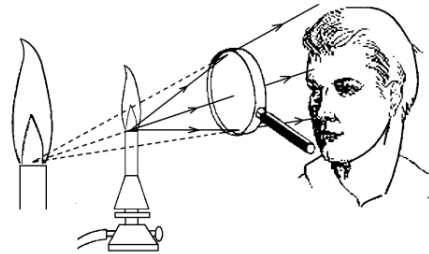
Wat is het kenmerk van een pseudoscopisch beeld?

b.

Hoe kun je snel nagaan of een beeld een pseudoscopisch beeld is?

Opgave 2

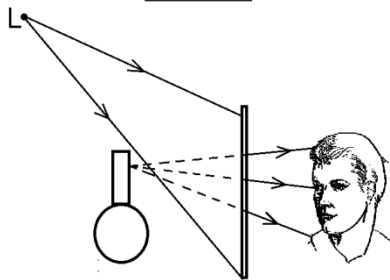
Is het beeld van de vlam in de figuur hiernaast pseudoscopisch? Leg je antwoord kort uit.



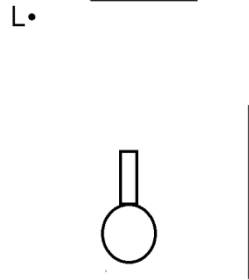
Opgave 3

In de onderstaande figuur 1 wordt een transmissiehologram van een vaas op een normale manier uitgelezen. Teken in figuur 2 hoe het hologram belicht moet worden om een reëel beeld van de vaas te krijgen.

Figuur 1

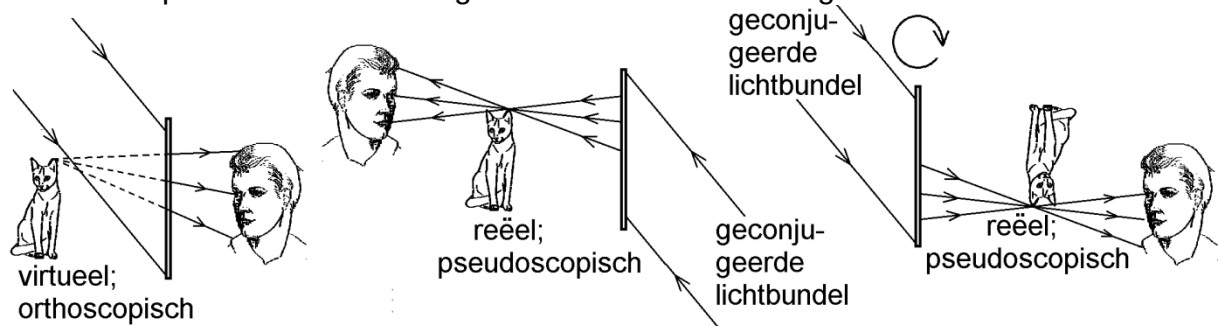


Figuur 2



Opgave 4

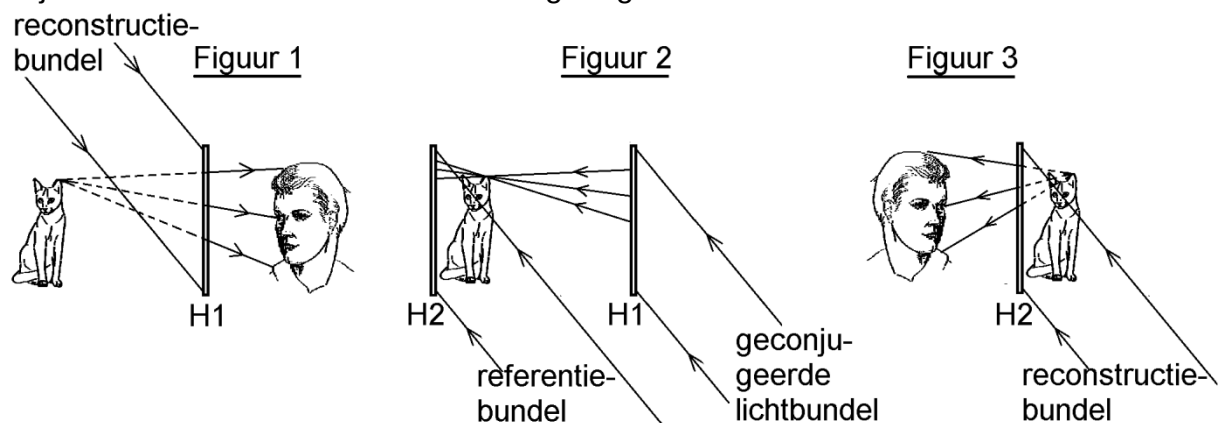
In de onderstaande linker figuur wordt een transmissiehologram op de gewone manier uitgelezen. Bij het opnemen van het hologram was de referentiebundel evenwijdig; de reconstructiebundel is nu dus ook evenwijdig. In de middelste figuur wordt het hologram beschenen met de geconjugeerde lichtbundel, die in tegengestelde richting op het hologram valt. In de rechter figuur is een alternatieve manier weergegeven om het hologram met de geconjugeerde lichtbundel te bestralen, namelijk door alleen het hologram 180° te draaien. De draaiingsas staat loodrecht op de lichtbundel en ligt in het vlak van het hologram.



Leg uit welk voordeel deze alternatieve manier heeft.

Opgave 5

In de volgende figuur 1 wordt hologram H1 op een normale manier uitgelezen. De reconstructiebundel is evenwijdig (de referentiebundel tijdens het maken van H1 was ook evenwijdig). Het beeld van de kat is orthoscopisch. In figuur 2 wordt H1 met de geconjugeerde lichtbundel belicht. Tevens wordt een tweede hologram H2 gemaakt. De referentiebundel en de objectbundel vallen allebei op de rechterkant op H2. De objectbundel bestaat uit de door H1 afgebogen lichtbundel.



a.

Leg uit of H2 een transmissie- of een reflectiehologram wordt.

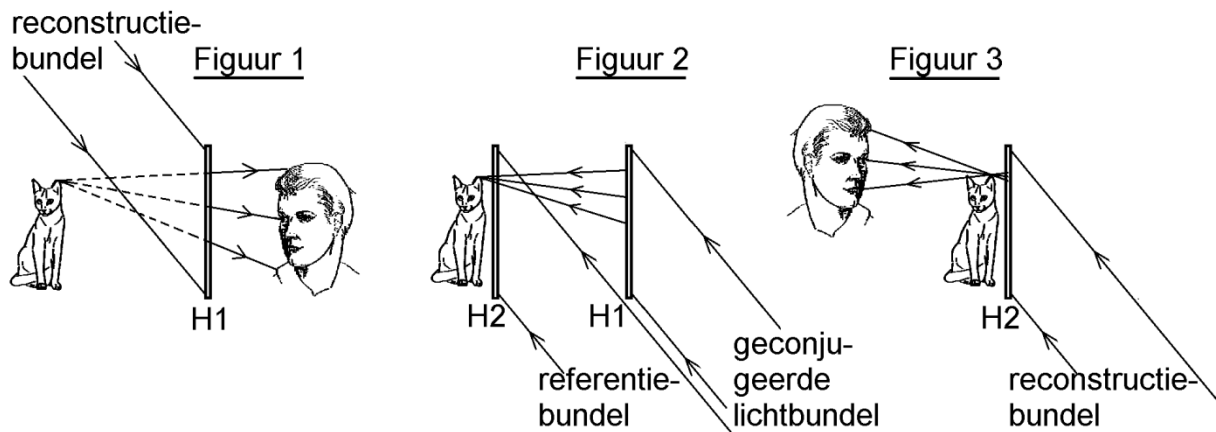
In figuur 3 wordt het nieuwe hologram H2 uitgelezen waarbij de reconstructiebundel gelijk is aan de referentiebundel in figuur 2.

b.

Is het beeld van de kat in figuur 3 reëel of virtueel?

Is het beeld van de kat in figuur 3 orthoscopisch of pseudoscopisch?

In de volgende drie figuren wordt precies hetzelfde gedaan als in de bovenstaande drie figuren behalve dat in figuur 2 het te maken hologram H2 zich rechts van het beeld van de kat bevindt.



c.

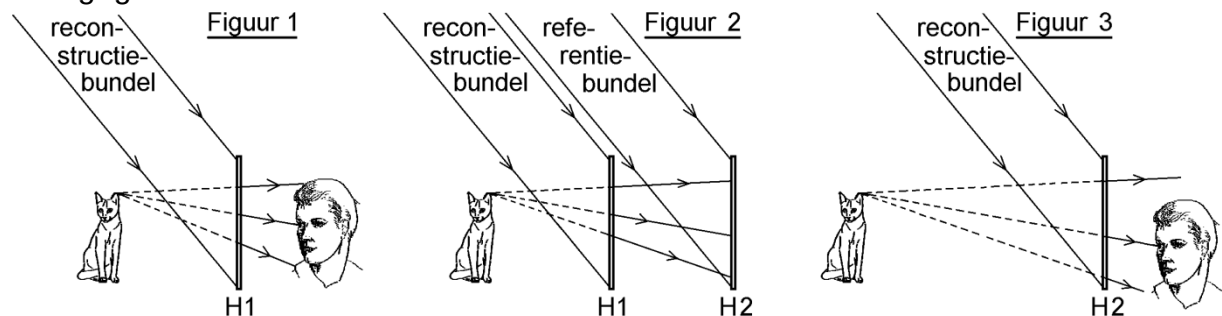
Is het beeld van de kat in figuur 3 nu reëel of virtueel?

Is het beeld van de kat in figuur 3 nu orthoscopisch of pseudoscopisch?

§ 10 Kopiëren van hologrammen

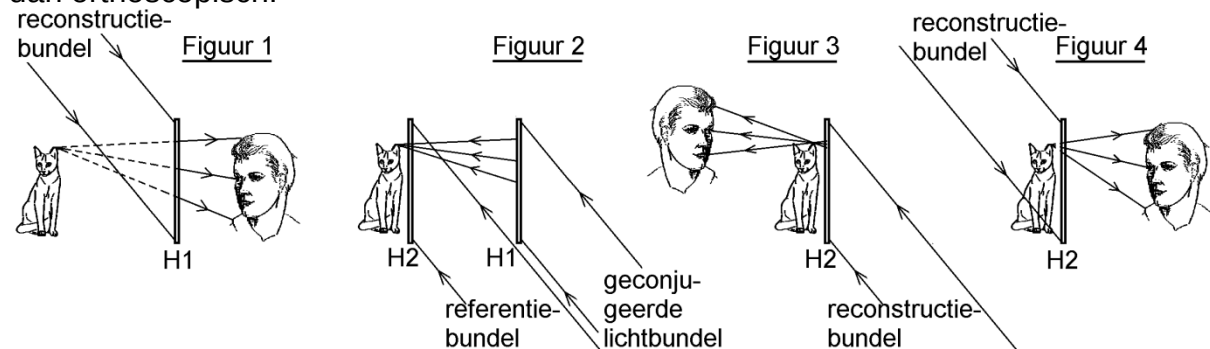
Het kopiëren van een hologram

In de onderstaande figuur 1 wordt een transmissiehologram, aangeduid met H1, uitgelezen. Voor het gemak is de reconstructiebundel weer evenwijdig. In de volgende tekst nemen we elke referentie- en reconstructiebundel evenwijdig. Stel dat je H1 wilt kopiëren en dat de kopie, aangeduid met H2, ook een transmissiehologram moet zijn. Je zou dan in eerste instantie aan de opstelling in figuur 2 kunnen denken. De eerste orde afgebogen lichtbundel door H1 doet hierbij dienst als objectbundel voor H2. Na de opnamefase kan H2 worden uitgelezen. Dit is in figuur 3 weergegeven.

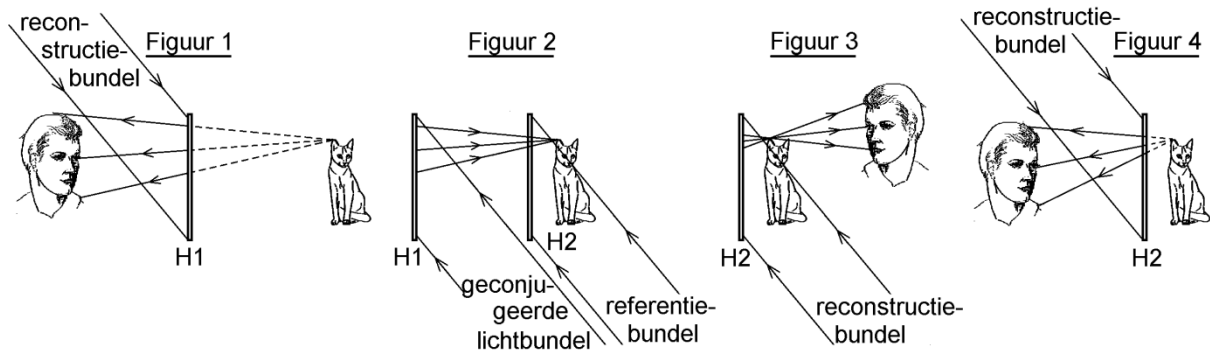


De bovenstaande manier van kopiëren heeft als groot nadeel dat het virtuele beeld (de kat) op grote afstand van het nieuwe hologram H2 komt te liggen. Daarom wordt er voor een andere manier van kopiëren gekozen. Daarbij wordt het originele hologram H1 beschenen met de geconjugeerde lichtbundel waardoor er een reëel beeld gevormd wordt. Dit beeld kan men zo dicht bij hologram H2 brengen als men maar wil. In de volgende tekst wordt dit uitgewerkt.

In de onderstaande figuur 1 wordt nogmaals het oorspronkelijke transmissiehologram H1 bij normaal gebruik uitgelezen. Figuur 2 toont hoe een kopie van H1 gemaakt wordt (de opnamefase van H2 dus). Hierin wordt hologram H1 beschenen met de geconjugeerde lichtbundel zodat er een reëel beeld ontstaat. Op hologram H2 valt het door H1 afgebogen licht en de referentiebundel. In de figuur bevindt het beeld zich voorbij H2 maar dat hoeft niet perse. In de figuren 3 en 4 wordt het nieuwe hologram H2 uitgelezen. In figuur 3 komt de reconstructiebundel vanuit dezelfde richting als de referentiebundel in figuur 2. Het ontstane beeld in figuur 3 is pseudoscopisch en dat is ongewenst. Daarom laat men voor het correct uitlezen van H2 de reconstructiebundel vanaf de andere kant komen (zie figuur 4). Het beeld is dan orthoscopisch.



De onderstaande figuren geven het kopiëren van een reflectiehologram weer. Er is een grote overeenkomst met de bovenstaande figuren die betrekking hadden op een transmissiehologram. In beide figuren 2 vindt het kopiëren van het hologram plaats en in beide figuren 4 wordt het nieuwe hologram op de juiste manier uitgelezen. Ga dat na!



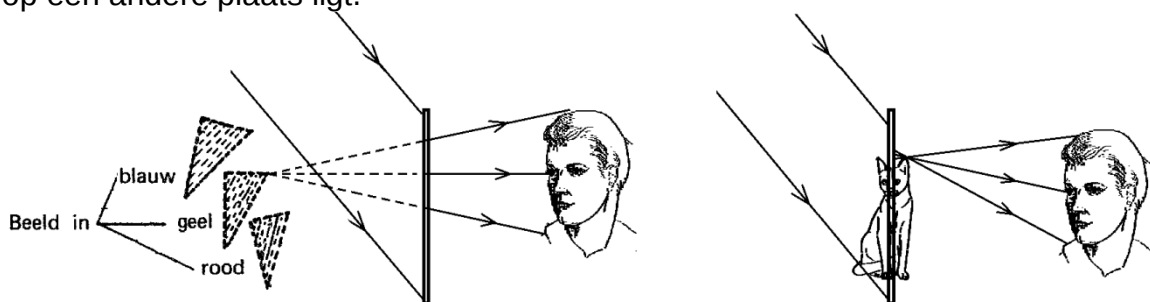
In beide bovenstaande figuren 4 is het uiteindelijke beeld van de kat zowel orthoscopisch als virtueel. Door in de figuren 2 de holografische plaat H2 in de richting van het beeld (de kat) te verplaatsen, kan het uiteindelijke beeld in figuur 4 ook deels reëel of zelfs helemaal reëel zijn.

Opmerking

In de bovenstaande uitleg van het kopiëren van hologrammen werden de lichtbundels een aantal keer van richting omgekeerd. In de praktijk is het praktischer om in plaats daarvan het betreffende hologram 180° te draaien.

Transmissiehologram dat met wit licht uitleesbaar is

Zoals bekend is, moet een transmissiehologram worden uitgelezen met monochromatisch licht. Wit licht (een combinatie van veel kleuren) is ongeschikt omdat de mate van afbuiging van de lichtstralen afhangt van de golflengte. Elk beeldpunt zou bij verschillende kleuren verschillende plaatsen hebben. Zie bijvoorbeeld de onderstaande linker figuur waarin het driehoekige beeld bij elke kleur op een andere plaats ligt.

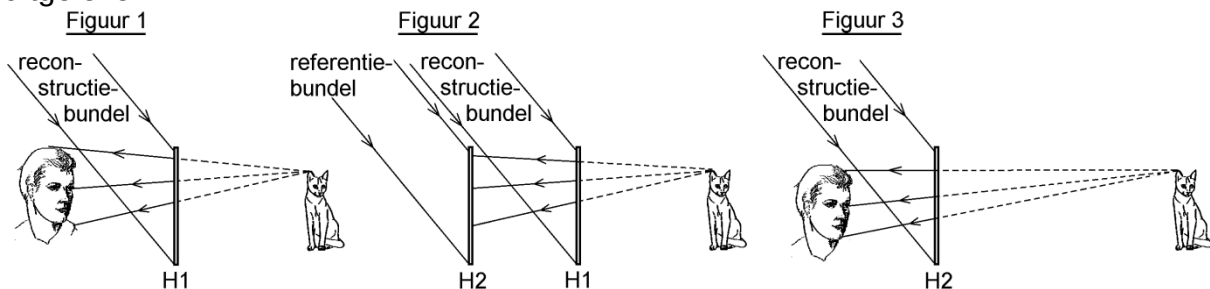


Als het beeld echter in het hologramvlak ligt en het beeld bovendien tamelijk vlak is, zodat alle beeldpunten slechts een kleine afstand tot het hologram hebben, kan het transmissiehologram wel met wit licht worden uitgelezen. De spreiding van de plaats van ieder beeldpunt bij meerdere kleuren is dan klein. Deze situatie is in de rechter figuur weergegeven. Een dergelijk hologram kan worden verkregen door tijdens de opnamefase de holografische plaat in het beeld van een ander hologram te plaatsen. Zie de voorgaande (op transmissiehologrammen betrekking hebbende) figuur 2 waarin H2 het beeld van H1 moet doorsnijden.

Opgaven bij § 10

Opgave 1

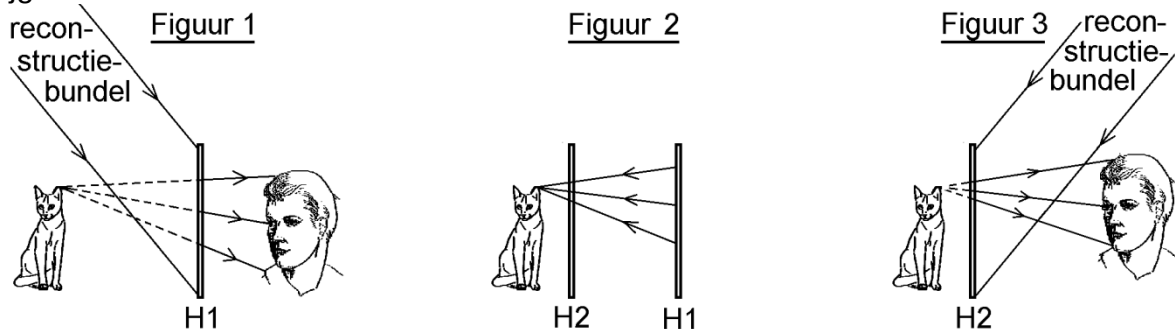
De onderstaande figuren tonen een simpele manier om een reflectiehologram te kopiëren. In figuur 1 wordt het originele reflectiehologram H1 voor normaal gebruik uitgelezen. In figuur 2 wordt H1 gekopieerd naar hologram H2. In figuur 3 wordt H2 uitgelezen.



Geef een reden waarom deze manier van kopiëren niet wordt toegepast.

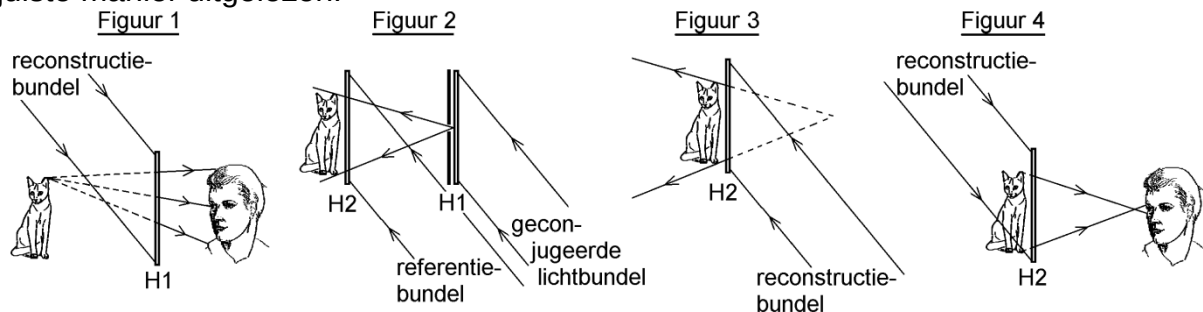
Opgave 2

In de onderstaande figuur 1 wordt transmissiehologram H1 uitgelezen en in figuur 3 wordt reflectiehologram H2 uitgelezen. H2 is een kopie van H1. De opstelling van het kopiëren is in figuur 2 afgebeeld. Voer de volgende twee opdrachten uit. Teken in figuur 2 de invallende lichtbundels. Teken in figuur 2 een verticale stippellijn op de plaats waar H2 zou moeten staan om bij het uitlezen (figuur 3) een reëel beeld te krijgen.



Opgave 3

Voor het uitlezen van een transmissiehologram moet in principe monochromatisch licht worden gebruikt. Eén manier om hier onderuit te komen, is het beeld samen te laten vallen met het hologram. Zie de voorgaande leestekst. Een andere manier wordt toegepast bij een zogenoemd 'regenbooghologram'. Een regenbooghologram is een transmissiehologram dat ontstaat bij het kopiëren van een ander transmissiehologram. In principe kan de kopieerprocedure, die in de leestekst beschreven staat, gevolgd worden. Als extra moet een ondoorzichtige plaat met een horizontale smalle spleet worden toegevoegd. Zie de volgende figuren. In figuur 1 wordt H1 (het origineel) bij normaal gebruik uitgelezen. In figuur 2 vindt de eigenlijke opnamefase van H2 (het regenbooghologram) plaats. Vlak achter H1 wordt de plaat met spleet geplaatst. De objectbundel voor H2 komt dus uit een kleine spleet. In figuur 3 en 4 wordt het nieuwe hologram H2 uitgelezen. In figuur 3 is het beeld pseudoscopisch terwijl het in figuur 4 orthoscopisch is. In figuur 4 wordt H2 dus op de juiste manier uitgelezen.



Neem eerst aan dat de reconstructiebundel in figuur 4 monochromatisch is en dat de waarnemer zich op de getekende afstand van het hologram bevindt.

a.

Leg dan uit dat de waarnemer in figuur 4 alleen bij een bepaalde hoogte het beeld (de kat) kan zien alsof hij door een denkbeeldige brievenbus zou kijken.

Neem nu aan dat de reconstructiebundel in figuur 4 alle kleuren bevat.

b.

Leg dan uit dat voor de waarnemer het beeld bij elke hoogte een andere kleur heeft.

Leg uit dat de waarnemer vanuit een hoge positie een rood beeld ziet en vanuit een lage positie een violet beeld.

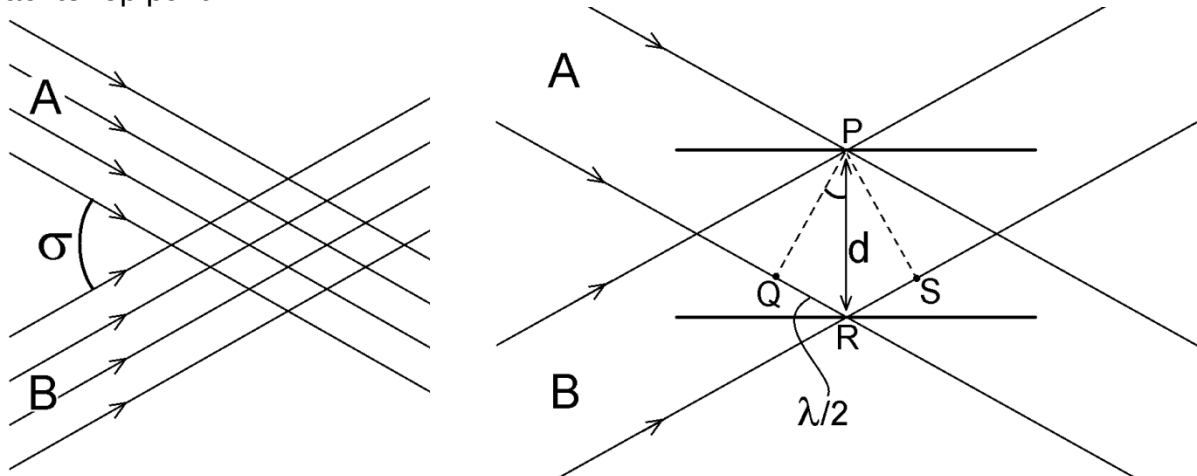
c.

Leg uit dat het waargenomen beeld van de kat bij elke kijkrichting scherp is.

Bijlagen

Afstand tussen de buikvlakken bij twee kruisende bundels

In de onderstaande linker figuur kruisen twee vlakke golven A en B elkaar onder hoek σ . De golflengte van beiden is λ . In de rechter figuur geven de twee horizontale lijnen aangrenzende buikvlakken aan. De afstand tussen deze buikvlakken wordt met d aangegeven. Op de buikvlakken liggen de punten P en R. Voor golf A loopt punt P een halve periode voor op punt R. Voor golf B loopt punt P juist een halve periode achter op punt R.



Stippellijn PQ staat loodrecht op golf A en stippellijn PS staat loodrecht op golf B. De afstanden QR en RS bedragen dan ieder $\lambda/2$. Omdat hoek QPS gelijk is aan σ , geldt:

$$\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\lambda/2}{d}.$$

Hieruit volgt:

$$d = \frac{\lambda/2}{\sin(\sigma/2)}.$$

Hieruit volgt dat bij $\sigma = 180^\circ$ de afstand tussen de buikvlakken minimaal is, namelijk $\lambda/2$. Hoe kleiner σ is, des te groter d is. Hieruit volgt dat trillingen tijdens het maken van reflectiehologrammen het schadelijkst zijn.

Bragg-reflectie bij het uitlezen van een hologram

Stel dat je een hologram (zowel reflectie- als transmissie-) tijdens het uitlezen op precies dezelfde manier belicht als tijdens het maken van het hologram. Dus gelijke invalshoeken en gelijke golflengtes. Aan de wet van Bragg is dan voldaan en het uitlezen van het hologram is optimaal. Volgens de wet van Bragg moet gelden:

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda}{2 \cdot d}$$

Substitutie van het hierboven gevonden resultaat voor d geeft:

$$\cos(\alpha) = \sin(\sigma/2).$$

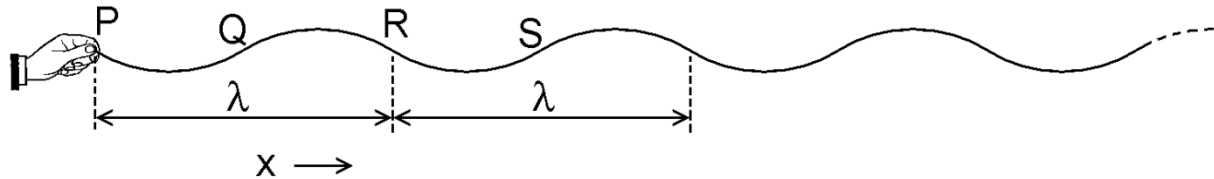
Hieraan is inderdaad voldaan als de invalshoeken tijdens het maken en het uitlezen van het hologram gelijk zijn.

De uitwijking bij een golf

In de onderstaande figuur beweegt iemand met zijn hand het linker uiteinde van een koord harmonisch op en neer met amplitude A en periode T . Hierdoor loopt er in het koord een golf naar rechts. Stel dat op tijdstip $t = 0$ s de hand door de evenwichtsstand in positieve richting gaat. Voor het linker uiteinde P van het koord geldt dan op alle tijdstippen de onderstaande relatie.

$$u = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right).$$

In deze formule is de hoek, waarop de sinus werkt, in radialen uitgedrukt.



Omdat de golf naar rechts door het koord beweegt, hebben de punten zoals Q, R en S minder trillingen uitgevoerd dan P. Zo heeft Q een halve trilling minder uitgevoerd dan P en R één trilling minder. Enzovoort. Om de plaats langs het koord aan te duiden, gebruiken we de coördinaat x waarbij de oorsprong ($x = 0$) samenvalt met het linker uiteinde P . Voor de uitwijking van een willekeurig punt van het koord geldt dan:

$$u = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ter controle nemen we de punten Q en R.

Voor Q geldt $x = \lambda/2$ en voor de uitwijking geldt: $u = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - \pi\right)$.

Voor R geldt $x = \lambda$ en voor de uitwijking geldt: $u = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - 2\pi\right)$.

De termen $-\pi$ en -2π binnen de haakjes geven aan dat er een halve trilling respectievelijk een hele trilling minder is uitgevoerd.

Tenslotte definiëren we de hoeksnelheid ω als $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en het golfgetal k als $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

We krijgen dan een overzichtelijke uitdrukking zonder breuken.

$$u = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Deze uitdrukking voor de uitwijking is ook te gebruiken voor een lichtbundel waarbij λ de afstand tussen twee opeenvolgende golfmaxima is.

De uitwijking van het lichtveld op een plaat als hier een evenwijdige lichtbundel scheef op valt

Nu gaan we op zoek naar een handige uitdrukking voor de verstoring (uitwijking) u langs de plaat ten gevolge van een scheef invallende evenwijdige lichtbundel. Zie de figuur hiernaast. De sporten (treden) van de ladder stellen golfmaxima voor. De golflengte λ is de afstand tussen twee golfmaxima. De afstand tussen twee golfmaxima, gemeten langs de plaat, wordt aangegeven met λ_x . Als de golf invalt onder een hoek α geldt:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)}.$$

Bij de volgende berekeningen maken we veelvuldig gebruik van het golfgetal k_x . Hiervoor geldt:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi \cdot \sin(\alpha)}{\lambda}.$$

Hierboven werd het golfgetal k gedefinieerd als:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Het verband tussen k_x en k wordt dan:

$$k_x = k \cdot \sin(\alpha).$$

Als x de plaats op de plaat weergeeft, geldt voor de uitwijking van het invallende licht op tijdstip t :

$$u_{in}(t, x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k_x \cdot x).$$

In het algemeen moet er aan het argument van de sinus nog een constante term worden toegevoegd. Bij de juiste keuze van de oorsprong van de x -as is dit echter niet nodig.

Het golfgetal bij een cosinustralie

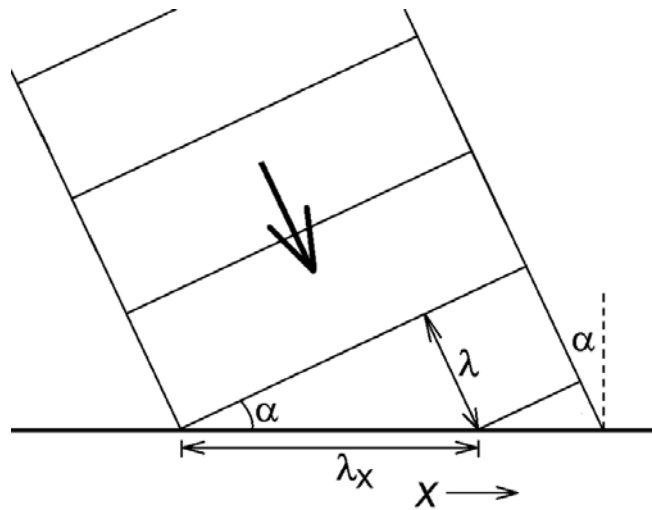
Allereerst definiëren we het golfgetal k_a van een cosinustralie als:

$$k_a = \frac{2\pi}{a}.$$

De uitdrukking voor de doorlaatbaarheid T wordt dan:

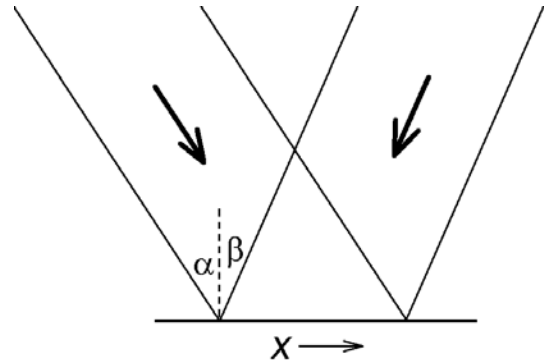
$$T = \frac{1 + \cos(k_a \cdot x)}{2}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat T varieert tussen 0 en 1 en dat de periode van T gelijk is aan a .



Een cosinustralie maken

In de figuur hiernaast vallen twee evenwijdige coherente lichtbundels op een holografische plaat. In het gebied waarin de bundels elkaar overlappen, ontstaat er een interferentiepatroon met onderling evenwijdige equidistante lichte en donkere lijnen. Langs de plaat, loodrecht op de interferentielijnen, verloopt de intensiteit (co)sinusvormig. In deze richting kiezen we de x-as waarbij x de plaats op de plaat aangeeft. We nemen aan dat de bundels dezelfde golflengte en intensiteit hebben (en dus automatisch ook dezelfde amplitude). De hoeken waaronder de lichtbundels op de plaat vallen, zijn α en β . Merk op dat in de figuur β negatief is; zie de afspraak over de tekens van hoeken.



Voor de uitwijking van de ene bundel bij de plaat geldt (zie de vorige analyse):

$$u_1(t, x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k_1 \cdot x) \quad \text{met} \quad k_1 = k \cdot \sin(\alpha).$$

Analoog geldt voor de uitwijking van de andere bundel bij de plaat:

$$u_2(t, x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k_2 \cdot x) \quad \text{met} \quad k_2 = k \cdot \sin(\beta).$$

Deze uitdrukkingen voor u_1 en u_2 gelden alleen bij de juiste keuze van de plaats van de oorsprong ($x = 0$); anders moeten er nog constante termen binnen de haakjes worden toegevoegd.

Voor de resulterende uitwijking u_{res} langs de plaat geldt dan:

$$u_{\text{res}}(t, x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k_1 \cdot x) + A \cdot \sin(\omega \cdot t - k_2 \cdot x).$$

Vanuit de wiskunde weten we: $\sin(p) + \sin(q) = 2 \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Hiermee kunnen we de uitdrukking voor u_{res} herschrijven als:

$$u_{\text{res}}(t, x) = 2A \cdot \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k_1}{2} x - \frac{k_2}{2} x\right)$$

Aangezien de resulterende intensiteit evenredig is met het kwadraat van de resulterende amplitude, geldt:

$$I(x) = I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x\right).$$

Hierin is I_0 de maximale intensiteit bij de fotografische plaat.

Aangezien $\cos^2\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1 + \cos(p)}{2}$ kunnen we voor de intensiteit schrijven:

$$I(x) = I_0 \cdot \frac{1 + \cos[(k_2 - k_1)x]}{2}.$$

Afgezien van een constante factor I_0 lijkt dit resultaat op de eerder gegeven formule voor de doorlaatbaarheid van een cosinustralie:

$$T(x) = \frac{1 + \cos(k_a \cdot x)}{2}.$$

De periodes van beide functies zijn aan elkaar gelijk als voldaan is aan:

$$|k_2 - k_1| = k_a.$$

Bedenk hierbij dat de modulusstrepen voortkomen uit het feit dat de cosinus een even functie is. Hieruit volgt:

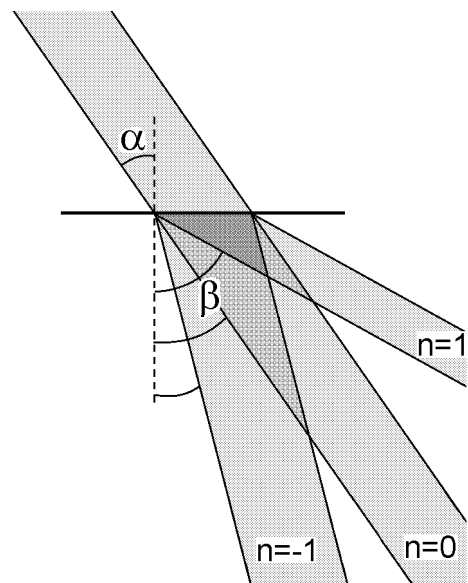
$$|\sin(\beta) - \sin(\alpha)| = \frac{\lambda}{a}.$$

Hieruit volgt:

$$\sin(\beta) - \sin(\alpha) = +\frac{\lambda}{a} \quad \text{of} \quad \sin(\beta) - \sin(\alpha) = -\frac{\lambda}{a}.$$

De transmissie van een cosinustralie

In de figuur hiernaast wordt een cosinustralie beschenen met een evenwijdige lichtbundel die onder een hoek α invalt. Zoals uit de onderstaande berekening zal blijken, wordt deze bundel door het tralie opgesplitst in drie bundels. De hoeken die deze bundels met de normaal maken, zijn met β aangeduid.



Voor het licht dat door het cosinustralie heen gaat, geldt:

$$u_{door}(t, x) = T(x) \cdot u_{in}(t, x)$$

Als we hierin de uitdrukkingen voor $T(x)$ en $u_{in}(t, x)$ substitueren, krijgen we:

$$u_{door}(t, x) = \frac{1 + \cos(k_a x)}{2} \cdot A \cdot \sin(\omega t - k_x x).$$

Uitwerken geeft:

$$u_{door}(t, x) = \frac{A}{2} \cdot \sin(\omega t - k_x x) + \frac{A}{2} \cdot \sin(\omega t - k_x x) \cdot \cos(k_a x).$$

Door gebruikmaking van de betrekking $\sin(p)\cos(q) = \frac{\sin(p-q) + \sin(p+q)}{2}$ vinden we:

$$u_{door}(t, x) = \frac{A}{2} \cdot \sin(\omega t - k_x x) + \frac{A}{4} \cdot \sin(\omega t - k_x x - k_a x) + \frac{A}{4} \cdot \sin(\omega t - k_x x + k_a x).$$

De eerste term correspondeert met een bundel die in dezelfde richting doorloopt als de invallende golf.

De tweede term correspondeert met een lichtbundel waarbij voor hoek β geldt:

$$\sin(\beta) = \sin(\alpha) + \frac{\lambda}{a}.$$

De derde term correspondeert met een lichtbundel waarbij voor hoek β geldt:

$$\sin(\beta) = \sin(\alpha) - \frac{\lambda}{a}.$$